Galois-Algebren zu Hopf-Algebren und verallgemeinerte Quaternionen

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Carl Hans Wenninger

aus Augsburg

eingereicht am 2. November 1988

1. Berichterstatter : Prof. Dr. B. Pareigis

2. Berichterstatter : Prof. Dr. W. Zimmermann

Tag der mündlichen Prüfung : 27. Februar 1989

Inhalt

Einleitung

Eine alte und bis heute noch nicht allgemein beantwortete Frage im Zusammenhang mit Brauer-Gruppen ist die, ob jede zentral-einfache Algebra über einem Körper K ähnlich zu einem Tensorprodukt von zyklischen Algebren ist, oder anders ausgedrückt, ob die Brauer-Gruppe von K von den Klassen der zyklischen Algebren erzeugt wird. Anfang der dreißiger Jahre zeigten ALBERT, HASSE, BRAUER und NOETHER, daß über einem Zahlkörper jede zentral-einfache Algebra sogar ähnlich zu einer zyklischen Algebra ist. Wie ALBERT etwa zur gleichen Zeit bewiesen hat, sind auch p-Algebren (= zentral-einfache Algebren der Dimension p^n über einem Körper der positiven Charakteristik p) stets ähnlich zu einer geeigneten zyklischen Algebra. Im allgemeinen benötigt man zumindest Tensorprodukte zyklischer Algebren, wie ein ebenfalls von ALBERT stammendes Beispiel eines nicht zyklischen Schiefkörpers zeigt.

Ein entscheidender Durchbruch im Zusammenhang mit dieser Frage gelang 1982 MERKURIEV und SUSLIN: Sie zeigten, daß zu jeder natürlichen Zahl n und für jeden Körper K, welcher eine primitive n-te Einheitswurzel ζ enthält (und dessen Charakteristik somit n nicht teilt), der sogenannte Normresthomomorphismus vom Grad n

$$\begin{array}{rcccc} R_{n,K} & : & K_2(K)\,/\,n\cdot K_2(K) & \xrightarrow{\sim} & {}_n\mathrm{Br}\,(K) \\ & & \{a,b\} & \longmapsto & \left(\dfrac{a\,,\,b}{K,\zeta}\right) \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Hierbei bezeichnen $K_2(K)$ die zweite Milnorsche K-Gruppe, ${}_n\mathrm{Br}\,(K)$ den n-Torsionsanteil der Brauer-Gruppe von K und

$$\left(\frac{a\,,\,b}{K,\zeta}\right) \;=\; K\,\langle U,V\,\rangle \;/\; \bigl(U^n-a,\,V^n-b,\,V\cdot U-\zeta\cdot U\cdot V\,\bigr)$$

die Normrest-Algebra zu a und b in $K\setminus\{0\}$ (für $K=\mathbf{R}$, $n=2$ und $a=b=-1$ ergibt dies die Hamiltonschen Quaternionen $\mathbf{H}$). Da sich Normrest-Algebren als spezielle zyklische Algebren auffassen lassen, folgt aus diesem Satz, daß jede zentral-einfache K-Algebra mit n teilendem Exponenten ähnlich zu einem Tensorprodukt zyklischer Algebren ist, falls K alle n-ten Einheitswurzeln enthält.

Genügt K nicht dieser Voraussetzung, so kann man sich zumindest für eine ungerade Primzahlpotenz n wie folgt behelfen: Sei L der durch Adjunktion einer primitiven n-ten Einheitswurzel ζ enstehende Erweiterungskörper von K und bezeichne

$$\mathrm{Cor}_{L/K} \;:\; \mathrm{Br}\,(L) \;\to\; \mathrm{Br}\,(K)$$

die sogenannte Korestriktionsabbildung. MERKURJEV zeigt, daß für solche n die Einschränkung von $\mathrm{Cor}_{L/K}$ auf den n-Torsionsteil surjektiv ist. Insbesondere wird also ${}_n\mathrm{Br}\,(K)$ von den Algebren

$$\mathrm{Cor}_{L/K}\left(\frac{a\,,\,b}{L,\zeta}\right)$$

erzeugt. Leider ist bisher nicht bekannt, ob diese Algebren stets ähnlich zu einem Tensorprodukt zyklischer Algebren sind. Für eine Zweierpotenz n gilt eine leichte Abwandlung hiervon, falls n bzw. K so beschaffen sind, daß die Galois-Gruppe von L über K zyklisch ist (dies ist stets der Fall, wenn n nicht durch 8 teilbar oder -1 ein Quadrat in K ist; vgl. [Me]).

Der Zusammenhang zu der vorliegenden Arbeit besteht darin, daß sowohl die zyklischen Algebren als auch die durch Korestriktion aus ihnen entstehenden Algebren in natürlicher Weise eine Galois-Struktur bezüglich geeigneter Hopf-Algebren tragen. Diese zentral-einfachen Galois-Algebren lassen sich als ein modifiziertes Tensorprodukt (sogenanntes Smash-Produkt) zweier kommutativer Unteralgebren darstellen, wobei diese Unteralgebren selbst wieder mit einer Galois-Struktur versehen sind. Im Fall einer Normrest-Algebra tritt diese Galois-Struktur besonders offensichtlich in Erscheinung: Indem man den Restklassen u, v von U, V in obiger Präsentation den Grad $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ zuordnet, erhält man eine $\mathbf{Z}/(n) \times \mathbf{Z}/(n)$-Graduierung derart, daß der K-lineare Unterraum aller homogenen Elemente vorgegebenen Grades stets eindimensional ist (wie sich eine solche Graduierung als eine Galois-Struktur interpretieren läßt, wird später erklärt werden). Die von u bzw. v erzeugten Unteralgebren sind graduierte Unteralgebren, und die Multiplikationsabbildung induziert einen Vektorraum-Isomorphismus des Tensorprodukts dieser beiden Unteralgebren mit der Normrest-Algebra.

Das erste Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit dem Konzept einer Galois-Algebra zu einer endlichen Hopf-Algebra über einem kommutativen Grundring R. Dieses Konzept wurde für kommutative Algebren von CHASE und SWEEDLER [Ch-Sw] aufbauend auf die klassische Galois-Theorie für Körpererweiterungen sowie deren Verallgemeinerung auf Ringerweiterung durch CHASE, HARRISON und ROSENBERG [C-H-R] entwickelt. Um diesen Begriff etwas zu erläutern, beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den Fall eines Grundkörpers K.

Ein möglicher Zugang hierzu ist geometrischer Natur: Gegeben seien eine Algebra A und eine Hopf-Algebra H (beide endlich-dimensional und kommutativ) sowie eine Operation

$$\mathrm{Spec}\,(A) \times \mathrm{Spec}\,(H) \;\rightarrow\; \mathrm{Spec}\,(A)$$

des durch H dargestellten endlichen Gruppenschemas $\mathrm{Spec}\,(H)$ auf dem affinen Schema $\mathrm{Spec}\,(A)$. Dann heißt A eine H-Galois-Algebra, falls $\mathrm{Spec}\,(A)$ ein prinzipal homogener Raum von $\mathrm{Spec}\,(H)$ ist, d.h. falls

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\,(A) \times \mathrm{Spec}\,(H) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Spec}\,(A) \times \mathrm{Spec}\,(A) \\ (x, g) & \longmapsto & (x, x \cdot g) \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Wir können die Operation von $\mathrm{Spec}\,(H)$ auf $\mathrm{Spec}\,(A)$ durch einen Morphismus

$$\alpha \;:\; A \;\to\; A \otimes H$$

der Koordinatenringe beschreiben (α muß natürlich einer (Ko-)Assoziativitätsbedingung genügen) und die definierende Eigenschaft einer Galois-Algebra in die Bedingung übersetzen, daß die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\alpha} & : & A \otimes A & \xrightarrow{\sim} & A \otimes H \\ & & a \otimes b & \longmapsto & (a \otimes 1) \cdot \alpha(b) \end{array}$$

ein Isomorphismus kommutativer Algebren ist. Diese algebraische Formulierung der Definition einer Galois-Algebra läßt sich problemlos auf nicht-kommutative Algebren verallgemeinern, wobei man allerdings nur die Bijektivität von $\tilde{\alpha}$ fordert, da $\tilde{\alpha}$ ähnlich wie die Multiplikationsabbildung einer Algebra nur im kommutativen Fall multiplikativ sein kann. Die klassische Galois-Theorie ordnet sich hier im Spezialfall konstanter Gruppenschemata unter, während man für die Cartier-Duale konstanter Schemata gerade die vollgraduierten Algebren erhält. Alternativ läßt sich α auch als eine Modul-Struktur der zu H dualen Hopf-Algebra $H^* = \mathrm{Hom}_K(H, K)$ auf A interpretieren, was der klassischen Vorstellung einer Operation der Galois-Gruppe etwas mehr entgegenkommt. Dies sowie einige grundlegende Eigenschaften solcher Galois-Algebren sind Gegenstand des ersten Abschnittes von Kapitel I.

Im Unterschied zur klassischen Galois-Theorie erhält man nur in seltensten Fällen eine Beschreibung aller Unteralgebren einer Galois-Algebra, wobei recht eigenartige Phänomene auftreten können [Gr-Pa]. Unser Interesse an diesen Galois-Algebren liegt jedoch in erster Linie darin, daß sich die Struktur einer Galois-Algebra sehr weitgehend in der Hopf-Algebra und der noch zu besprechenden Kommutator-Paarung widerspiegelt. Ferner kann man mit den Isomorphieklassen von Galois-Algebren im Fall endlicher Hopf-Algebren, die sowohl kommutativ als auch kokommutativ sind, relativ gut rechnen:

Wie in Abschnitt 2 gezeigt wird, läßt sich der Menge $\mathrm{Gal}\,(R, H)$ aller Isomorphieklassen von H-Galois-Algebren eine abelsche Gruppenstruktur aufprägen, wobei die Klassen der kommutativen Galois-Algebren eine Untergruppe $\mathrm{Gal}_c(R, H)$ bilden. Ferner induziert jeder Morphismus $\varphi : G \to H$ von (kommutativen und kokommutativen) Hopf-Algebren einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Gal}\,(R, \varphi) \;:\; \mathrm{Gal}\,(R, H) \;\longrightarrow\; \mathrm{Gal}\,(R, G)\,,$$

welcher kommutative Galois-Algebren in ebensolche überführt. Hierbei läßt sich das Bild einer H-Galois-Algebra X durch eine universelle Eigenschaft beschreiben, von der wir in dieser Arbeit extensiven Gebrauch machen werden. Diese Gruppenstruktur wurde im Fall kommutativer Galois-Erweiterungen zu abelscher Galois-Gruppe von Harrison [Har2] eingeführt und von Chase auf Hopf-Algebren übertragen.

Im dritten Abschnitt wird das bereits erwähnte Smash-Produkt eingeführt. Dieses ordnet je einer kommutativen H bzw. H^*-Galois-Algebra A bzw. B eine $H \otimes H^*$-Galois-Algebra $A \# B$ zu, welche sich vom Tensor-Produkt $A \otimes B$ nur dadurch unterscheidet, daß Tensoren der Form $a \# 1$ und $1 \# b$ in $A \# B$ nicht miteinander kommutieren, sondern einer gewissen über die Galois-Struktur von A und B definierten Vertauschungsrelation genügen.

Wie Ulbrich gezeigt hat, spiegelt sich die Nicht-Kommutativität einer Galois-Algebra stets in einer durch eine Vertauschungsrelation eindeutig bestimmten Paarung auf der zugehörigen Hopf-Algebra wider, wobei eine Galois-Algebra genau dann eine Azumaya-Algebra ist, wenn ihre Kommutator-Paarung regulär ist. Die Galois-Algebren der Form $A \# B$ lassen sich nun dadurch charakterisieren, daß ihre Kommutator-Paarung hyperbolisch ist. Insbesondere sind sie also Azumaya-Algebren, und in Kapitel III wird gezeigt, daß die induzierte Abbildung

$$\begin{array}{rcccl} \# & : & \mathrm{Gal}_c(R, H^*) \times \mathrm{Gal}_c(R, H) & \longrightarrow & \mathrm{Br}\,(R) \\ & & (A, B) & \longmapsto & A \# B \end{array}$$

in die Brauer-Gruppe von R bilinear ist. Gamst und Hoechsmann interpretieren diese Abbildung in ihrer „Quaternions généralisés“ betitelten Arbeit kohomologisch als ein geeignetes Cup-Produkt.

Im vierten Abschnitt wird das Verhalten von Galois-Algebren unter monoidalen (= Tensorprodukt erhaltenden) Funktoren besprochen, wie sie etwa beim Wechsel des Grundringes auftreten.

Sei L ein separabler Erweiterungskörper eines gegebenen Grundkörpers K vom endlichen Grad n. Riehm [Ri] ordnet jeder L-Algebra in funktorieller Weise eine K-Algebra zu und zeigt erstens, daß dieser Funktor eingeschränkt auf die kommutativen Algebren linksadjungiert zur Skalarbereichserweiterung ist, und zweitens, daß er einen wohldefinierten Homomorphismus $\mathrm{Br}\,(L) \to \mathrm{Br}\,(K)$ auf den Brauer-Gruppen induziert, welcher mit der üblichen, kohomologisch definierten Korestriktion übereinstimmt. In Kapitel II wird dieser Funktor im Zusammenhang mit Galois-Algebren untersucht. Den Ausgangspunkt hierfür bildet die Beobachtung, daß sich die Riehmsche Konstruktion zu einem monoidalen Funktor

$$\mathrm{Cor}_{L/K} \;:\; L\text{-}\mathbf{Mod} \;\longrightarrow\; K\text{-}\mathbf{Mod}$$

erweitern läßt. Damit führt $\mathrm{Cor}_{L/K}$ insbesondere L-Hopf-Algebren in K-Hopf-Algebren über und induziert einen in der L-Hopf-Algebra H natürlichen Homomorphismus

$$\mathrm{Cor}_{L/K} \;:\; \mathrm{Gal}\,(L, H) \;\longrightarrow\; \mathrm{Gal}\,(K, \mathrm{Cor}_{L/K}(H))\,.$$

Dabei ist $\mathrm{Cor}_{L/K}(H)$ selbst für „schöne“ Hopf-Algebren H (wie etwa der zu einem konstanten Gruppenschema gehörigen) fast immer „häßlich“ (also insbesondere nicht wieder konstant). (Dies kann auch als Grund dafür angesehen werden, warum die Korestriktion einer zyklischen Algebra im allgemeinen nicht automatisch wieder zyklisch ist.)

Ist die L-Hopf-Algebra jedoch als Restriktion $L \otimes_K H$ einer K-Hopf-Algebra gegeben, so läßt sich aus $\mathrm{Cor}_{L/K}$ ein Homomorphimus

$$H\text{-}\mathrm{N}_{L/K} \;:\; \mathrm{Gal}_c(L, L \otimes_K H) \;\longrightarrow\; \mathrm{Gal}_c(K, H)$$

ableiten, und die Komposition

$$\mathrm{Gal}_c(K, H) \xrightarrow{L \otimes_K -} \mathrm{Gal}_c(L, L \otimes_K H) \xrightarrow{H\text{-}\mathrm{N}_{L/K}} \mathrm{Gal}_c(K, H)$$

stimmt mit der Multiplikation mit $n = [L : K]$ überein. Im Fall des Gruppenringes zur zyklischen Gruppe der Ordnung k führt diese Abbildung die Klasse der vollgraduierten Algebra $L[U]/(U^k - a)$ in die Klasse der Algebra $K[V]/(V^k - \mathrm{N}_{L/K}(a))$ über, so daß es naheliegend erscheint, diese Abbildung die H-Norm zu nennen. Die H-Norm hängt dabei wesentlich von der Wahl der K-Hopf-Algebra H ab, die ja durch $L \otimes_K H$ keineswegs eindeutig bestimmt ist.

Im dritten und letzten Kapitel wird eine Brauer-Gruppe von Galois-Algebren mit hyperbolischer Kommutator-Paarung eingeführt. Diese hängt noch von einem relativ frei wählbaren System $\mathcal{H}$ von Hopf-Algebren ab. Durch Vergessen der Galois-Struktur erhält man einen natürlichen (i.a. nicht injektiven) Homomorphismus in die übliche Brauer-Gruppe. Diese Brauer-Gruppe von Algebren mit Galois-Struktur besitzt gerade diejenigen Eigenschaften, die es gestatten, den in Kapitel I bereitgestellten Kalkül anzuwenden und so Rechenregeln für Galois-Algebren der Form $A \# B$ (s.o.) zu beweisen, welche dann a fortiori auch in der klassischen Brauer-Gruppe gelten.

Im zweiten Abschnitt wird das Verhalten dieser Brauer-Gruppe von Galois-Algebren unter der Korestriktion besprochen, was zu einem einfachen Beweis der sogenannten Projektionsformel führt. Diese besagt, daß für eine K-Hopf-Algebra H und $A \in \mathrm{Gal}_c(K, H)$, $B \in \mathrm{Gal}_c(L, L \otimes_K H^*)$ die zentral-einfachen K-Algebren

$$\mathrm{Cor}_{L/K}\big((L \otimes_K A) \;\#\; B\big) \quad \sim \quad A \;\#\; H^*\text{-}\mathrm{N}_{L/K}(B)$$

ähnlich sind. Insbesondere erhält man hieraus einen kohomologie-freien Beweis der Projektionsformel für zyklische Algebren (siehe auch die kürzlich erschiene Arbeit von Tignol [Ti]).

An dieser Stelle möchte ich besonders Prof. Steven Chase und Prof. Moss Sweedler für das stete Interesse danken, das sie meiner Arbeit während meines Aufenthalts an der Cornell-University entgegenbrachten, sowie dem dortigen Department of Mathematics für die gewährte Gastfreundschaft. Mein Dank gilt auch Herrn Dr. Cornelius Greither sowie meinem Betreuer Prof. Dr. Bodo Pareigis für ihre hilfreiche Unterstützung.

Kapitel I : Galois-Algebren

I.1. Galois-Algebren

Ziel diese Abschnittes ist es, grundlegende Eigenschaften von Algebren bereitzustellen, die eine Galois-Struktur bezüglich einer Hopf-Algebra tragen, wobei insbesondere auch nicht-kommutative Algebren betrachtet werden sollen. Als Referenz für diesen Abschnitt seien [Pa], [Ch-Sw] und [Ch1] genannt. In [Pa] findet sich auch eine für unsere Zwecke gut geeignete Einführung in Hopf-Algebren, auf die neben [Sw] hingewiesen sei.

1.1. Erinnerung und Notation:
Eine *Hopf-Algebra* über R ist ein R-Modul H zusammen mit

einer Algebren-Struktur	$\nabla :$	$H \otimes H$	$\rightarrow$	$H,$	$\eta : R \rightarrow H,$
einer Koalgebren-Struktur	$\Delta :$	H	$\rightarrow$	$H \otimes H,$	$\varepsilon : H \rightarrow R$
und einer Abbildung	$S :$	H	$\rightarrow$	$H,$	(Antipode)

derart, daß Δ und ε Algebren- und ∇ und η Koalgebren-Abbildungen sind und $\sum_{(h)} h_{(1)} \cdot S(h_{(2)}) = \varepsilon(h) = \sum_{(h)} S(h_{(1)}) \cdot h_{(2)}$ gilt, wobei $h \in H$ und

$$\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} := \Delta(h) \qquad \text{(Sweedler-Notation)}.$$

H heißt *endlich,* falls H als R-Modul endlich-erzeugt und projektiv ist. Ist H endlich über R, was wir stets voraussetzen wollen, so ist das R-lineare Dual H^* von H wieder eine Hopf-Algebra und H^{**} ist in kanonischer Weise isomorph zu H.
H heißt *kokommutativ*, falls die Diagonale Δ von H invariant unter der durch $\tau(g \otimes h) = h \otimes g$ gegebenen Vertauschungsabbildung ist, was sich in Sweedler-Notation als $\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} = \sum_{(h)} h_{(2)} \otimes h_{(1)}$ liest.
Sei H eine Hopf-Algebra. Ein H*-Rechts-Komodul* ist ein R-Modul X zusammen mit einer Abbildung $\chi : X \rightarrow X \otimes H$, welche koassoziativ und kounitär ist. Analog zu a) setzt man für $x \in X$

$$\sum_{(x)} x_{(0)} \otimes x_{(1)} := \chi(x)\,.$$

1.2. Definition:
Sei H eine Hopf-Algebra über R. Eine R-Algebra X zusammen mit einer H-Komodul-Struktur $\chi : X \rightarrow X \otimes H$ heißt eine H*-Komodul-Algebra,* falls χ eine Algebren-Abbildung ist, d.h. falls

i) $\chi(1) = 1$

ii) $\sum_{(xy)} (xy)_{(0)} \otimes (xy)_{(1)} = \sum_{(x)(y)} x_{(0)} y_{(0)} \otimes x_{(1)} y_{(1)} \quad (x, y \in X)$

gelten.

1.3. Notation:
Für eine H-Komodul-Algebra $\chi : X \to X \otimes H$ bezeichne $\tilde{\chi}$ die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\chi}: & X \otimes X & \longrightarrow & X \otimes H \\ & x \otimes y & \longmapsto & \sum_{(y)} x \cdot y_{(0)} \otimes y_{(1)}. \end{array}$$

1.4. Definition:
Eine H-Komodul-Algebra $\chi : X \to X \otimes H$ heißt eine H*-Galois-Algebra,* falls X als R-Modul treuflach und $\tilde{\chi} : X \otimes X \to X \otimes H$ bijektiv ist.

Für eine kommutative Komodul-Algebra $\alpha : A \to A \otimes H$ ist $\tilde{\alpha} \in \mathbf{Alg}$, denn

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}\big((a \otimes b) \cdot (c \otimes d)\big) &= \sum_{(b)(d)} a \cdot b_{(0)} \cdot c \cdot d_{(0)} \otimes b_{(1)} \cdot d_{(1)} \\ &= \sum_{(b)(d)} a \cdot c \cdot b_{(0)} \cdot d_{(0)} \otimes b_{(1)} \cdot d_{(1)} \\ &= \tilde{\alpha}(a \otimes c) \cdot \tilde{\alpha}(b \otimes d). \end{aligned}$$

Falls A eine H-Galois-Algebra ist, so muß auch H wegen $A \otimes A \cong A \otimes H$ kommutativ sein, d.h. H repräsentiert eine endliche lineare algebraische Gruppe $G = \mathrm{Spec}\,(H)$. G operiert auf dem affinen Schema $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ und zwar einfach transitiv, denn $\tilde{\alpha}$ induziert einen Isomorpismus $G \times X \cong X \times X$, X ist also ein „prinzipal homogener Raum“ (engl.: principal homogeneous space) von G ([Wa, Abschnitt 18.3], [Pa, Abschnitt 3.3]).
Im Fall nicht-kommutativer Algebren versagt diese geometrische Interpretation. Dennoch spricht Chase [Ch1] im Fall einer kommutativen Hopf-Algebra von „pseudo principal homogeneous spaces“.
Wir merken noch an, daß im allgemeinen $\tilde{\chi}$ zwar nicht multiplikativ, aber dennoch X-linkslinear ist:

$$\tilde{\chi}((x \otimes 1) \cdot (y \otimes z)) = (x \otimes 1) \cdot \tilde{\chi}(y \otimes z).$$

1.5. Beispiele:
1) Sei Π eine endliche Gruppe und $X = \bigoplus_{\pi \in \Pi} X_\pi$ eine Π-graduierte Algebra. Dann ist X eine $H := R[\Pi]$-Komodul-Algebra vermöge $\chi(\sum x_\pi) := \sum x_\pi \otimes \pi$. X ist genau dann eine H-Galois-Algebra, falls X Π*-vollgraduiert* ist, d.h. falls $X_\pi \cdot X_{\pi'} = X_{\pi \cdot \pi'}$ und $X_1 = R \cdot 1 \cong R$ gelten. Dies ist z.B. für $B := R[v]/(v^n - b)$ mit einer Einheit $b \in U(R)$ bezüglich der zyklischen Gruppe C_n der Fall. (Falls die Picard-Gruppe von R kein Element mit in n aufgehender Ordnung besitzt, so ist jede $R[C_n]$-Galois-Algebra von dieser Form.)

2) Sei L/K eine klassische Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe Π. Dann ist L eine $H := K^\Pi := \mathrm{Abb}(\Pi, K)$-Komodul-Algebra vermöge $\lambda(l) := \sum_\pi \pi(l) \otimes e_\pi$, wobei $e_\pi \in H$ durch $e_\pi(\pi') := \delta_{\pi,\pi'}$ definiert sei. (K^Π läßt sich als Dual des Gruppenrings $K[\Pi]$ auffassen, wobei die e_π die zur Standardbasis von $K[\Pi]$ duale Basis bilden). Wir werden im Anschluß an den folgenden Satz sehen, daß L eine H-Galois-Algebra ist.

Im letzten Beispiel ist bereits ein gewisser Zusammenhang zwischen einer $K[\Pi]$-Modul-Struktur (einer Operation von Π) und einer $K[\Pi]^*$-Komodul-Struktur angeklungen. Allgemein läßt sich auf einem H-Rechts-Komodul $\chi : X \to X \otimes H$ durch

$$h^* \rightharpoonup (x) := \sum_{(x)} \langle\, h^*, x_{(1)} \,\rangle \cdot x_{(0)} \qquad (h^* \in H^*, x \in X),$$

eine H^*-Links-Modul-Struktur definieren. (Wir schreiben „ $\rightharpoonup$ “ um Verwechslungen insbesondere im Fall $X = H$ zu vermeiden: Man könnte $h^*(h)$ mit der Auswertung des Funktionals h^* in h, die wir $\langle\, h^*, h \,\rangle$ schreiben, verwechseln.) Dies ist ein Spezialfall der R-Modul-Isomorphie (man beachte, daß H endlich erzeugt projektiv ist)

$$\mathrm{Hom}\,(A, B \otimes H) \cong \mathrm{Hom}\,(H^* \otimes A, B) \qquad (A, B \in R\text{-}\mathbf{Mod}).$$

Insbesondere induziert auch umgekehrt eine H^*-Modul-Struktur auf X eine H-Komodul-Struktur. Hierzu wählt man eine Dual-Basis $\sum_i h_i^* \otimes h_i \in H^* \otimes H$ und setzt

$$\chi(x) := \sum_i h_i^*(x) \cdot h_i \qquad (x \in X).$$

Insgesamt erhält man so eine Isomorphie der Kategorie der H-Komoduln mit der der H^*-Moduln. Es stellt sich nun die Frage, was die Bedingung $\chi \in \mathbf{Alg}$ für die zugehörige H^*-Modul-Struktur auf X bedeutet:

1.6. Lemma und Definition:

Seien A und B R-Algebren und H eine Hopf-Algebra. Dann ist eine Abbildung $f : A \to B \otimes H$ genau dann eine Algebren-Abbildung, wenn die zugehörige Abbildung $g : H^* \otimes A \to B$ die Algebra A in die Algebra B mißt (engl.: H measures A to B), d.h. wenn für $h^* \in H^*$ und $a, a' \in A$ gelten:

i) $g(h^* \otimes 1) = \varepsilon(h^*)\, 1_B$ *und*

ii) $g(h^* \otimes (a \cdot a')) = \sum g(h^*_{(1)} \otimes a) \cdot g(h^*_{(2)} \otimes a')$.

Beweis: vgl. [Sw, Prop. 7.0.1] $\diamondsuit$

Man nennt eine Algebra X mit einer H^*-Modul-Struktur, welche X nach X mißt, eine *H^*-Modul-Algebra.* Die nächste Frage lautet nun, welche Bedingungen eine H^*-Modul-Algebra X erfüllen muß, um eine H-Galois-Algebra zu sein:

1.7. Satz:

Für eine H-Komodul-Algebra/H^*-Modul-Algebra X sind äquivalent:

i) X ist eine H-Galois-Algebra.

ii) ${}_RX$ ist endlich erzeugt projektiv und treu (also ein Progenerator) und die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & X \otimes H^* & \longrightarrow & \mathrm{End}_R(X) \\ & x \otimes h^* & \longmapsto & \big(y \mapsto x \cdot (h^* \rightharpoonup y)\big) \end{array}$$

ist bijektiv.

Beweis: Sei $\chi : X \to X \otimes H$ eine Galois-Algebra. Dann ist $\tilde{\chi} : X \otimes X \to X \otimes H$ ein Isomorphismus von X-Links-Moduln. Aus der Endlichkeit von H folgt somit, daß $X \otimes X$ als X-Links-Modul endlich erzeugt projektiv ist. Da X treuflach ist, folgt hieraus, daß X als R-Modul endlich erzeugt projektiv ist (vgl. [Pa, Prop. 1.3.10.b]). (Ulbrich [Ul2, Beweis zu Satz 1.1] gibt eine Dual-Basis für X an, wobei er die Frobenius-Eigenschaft $H \cong H^* \cdot$(Integrale von H) verwendet.)
Daß Φ bijektiv ist, ergibt sich aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \otimes H^* & \xrightarrow{\Phi} & \mathrm{End}_R(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F} & & \Big\downarrow{\scriptstyle G} \\ \mathrm{Hom}_X(X. \otimes H, X.) & \xrightarrow{\Psi} & \mathrm{Hom}_X(X. \otimes X, X.), \end{array}$$

wobei $\Psi = \mathrm{Hom}_X(\tilde{\chi}, X)$, sowie $F(x \otimes h^*)(y \otimes h) = y \cdot x \otimes \langle h^*, h \rangle$ und $G(f)(x \otimes y) = f(y) \cdot x$. Da X ein Progenerator ist, sind F und G bijektiv.
Die umgekehrte Implikation „ii) $\Rightarrow$ i)“ folgt ebenfalls aus obigem Diagramm. $\diamondsuit$

1.8. Folgerung:
Sei $\chi : X \to X \otimes H$ eine H-Galois-Algebra. Dann ist X lokal frei und besitzt lokal denselben Rang wie H.

Beweis: Wir haben bereits gesehen, daß X endlich erzeugt projektiv und somit lokal frei ist. Ist R lokal, so liefert $X \otimes X \cong X \otimes H$ die Gleichung $\mathrm{rg}(X) \cdot \mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}(X) \cdot \mathrm{rg}(H)$, also $\mathrm{rg}(X) = 0$ oder $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}(H)$. Ersteres steht jedoch im Widerspruch zu X treu. $\diamondsuit$

1.9. Weitere Beispiele:
2) Fortsetzung von Beispiel 1.5.2: Für die klassische Galois-Erweiterung L/K liefert das Lemma von Dedekind über die Unabhängigkeit der Charaktere die Injektivität der Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & L \otimes K[\Pi] & \longrightarrow & \mathrm{End}_K(L) \\ & l \otimes \pi & \longmapsto & l \cdot \pi(-)\,. \end{array}$$

Aus Dimensionsgründen muß Φ damit bijektiv sein, so daß L/K wie behauptet eine K^Π-Galois-Algebra darstellt.
Wie die beiden nächsten Beispiele zeigen, braucht eine kommutative K^Π-Galois-Algebra kein Körper zu sein. Jedoch sind über einem beliebigen Ring R die kommutativen R^Π-Galois-Algebren genau die Π-Galois-Erweiterungen von R im Sinne von Chase, Harrison und Rosenberg [C-H-R].

3) Jede endliche Hopf-Algebra H ist vermöge ihrer Diagonale $\Delta : H \to H \otimes H$ eine H-Galois-Algebra: Die Inverse zu $\tilde{\Delta}$ ist durch

$$\tilde{\Delta}^{-1}(h \otimes h') = \sum_{(h')} h \cdot S(h'_{(1)}) \otimes h'_{(2)}$$

gegeben.

4) Sind $\chi : X \to X \otimes G$ und $\upsilon : Y \to Y \otimes H$ Galois-Algebren, so ist $X \otimes Y$ vermöge

$$\chi(x \otimes y) := \sum_{(x)(y)} x_{(0)} \otimes y_{(0)} \otimes x_{(1)} \otimes y_{(1)}$$

eine $G \otimes H$-Galois-Algebra.

5) Ein typisches Beispiel einer nicht-kommutativen Galois-Algebra stellen die zyklischen Algebren dar: Für eine Galois-Erweiterung L/K mit zyklischer Galois-Gruppe $\Pi = \langle \sigma \rangle$ vom Grad n und einem Element $b \in K \setminus \{0\}$ läßt sich der L-Vektorraum $X = (L, b, \sigma)$ zur Basis $1 = v^0, v = v^1, v^2, \ldots, v^{n-1}$ durch $v^n := b \cdot 1$ und $v \cdot \lambda := \sigma(\lambda) \cdot v \quad \lambda \in L$ zu einer zentral-einfachen K-Algebra machen, die sog. *zyklische Algebra* zu L, b und σ [Dr, Def. I.7.4]. Durch

$$\chi(\lambda \cdot v^i) := \sum_{j=0}^{n-1} \sigma^j(\lambda) \cdot v^i \otimes e_{\sigma^j} \otimes \sigma^i$$

wird X zu einer $K^\Pi \otimes K[\Pi]$-Galois-Algebra. Wir werden auf Galois-Algebren von ähnlicher Bauart im Abschnitt 3 dieses Kapitels näher eingehen.

6) Auch inseparable Algebren treten als Galois-Algebren auf: Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $H := K[D]/(D^p)$ mit $\Delta(d) = d \otimes 1 + 1 \otimes d \ \ (d := \bar{D})$ (H stellt das Gruppenschema α_p dar). Zu beliebigem $a \in K$ ist dann $A := K[X]/(X^p - a)$ vermöge $\alpha(x) := x \otimes 1 + 1 \otimes d$ eine H-Galois-Algebra.

7) Kommutative Galois-Algebren zu separablen Hopf-Algebren sind stets separabel, denn mit H ist $A \otimes A \cong A \otimes H$ separabel über A und, da A sogar ein R-Progenerator ist, muß auch A als R-Algebra separabel sein [Kn-Oj, Prop. III. 2.2.2]. Im Falle eines Grundkörpers K läßt sich die Kategorie der kommutativen, separablen Algebren zumindestens formal sehr einfach beschreiben: Sie ist antiäquivalent zur Kategorie der endlichen, stetigen Γ-Mengen, wobei $\Gamma := \mathrm{Gal}\,(K_s/K)$ die absolute Galois-Gruppe von K bezeichne ([Wa,6.3]; die Operation von Γ auf der diskreten Menge X ist genau dann stetig, wenn der Stabilisator eines jeden Elements von X offen in Γ ist). Man ordnet hierzu einer separablen Algebra A die Menge $X_A := K\text{-}\mathbf{Alg}(A, K_s)$ zu, auf der Γ via K_s operiert. Umgekehrt entspricht der Γ-Menge X die separable Algebra $\mathrm{Abb}_\Gamma(X, K_s)$. Das Tensorprodukt von Algebren entspricht dem kartesischen Produkt von Γ-Mengen (mit diagonaler Γ-Operation). Eine Hopf-Algebren-Struktur auf einer separablen Algebra H entspricht somit einer Gruppen-Struktur auf X_H derart, daß Γ durch Gruppenautomorphismen auf X_H stetig operiert [Wa,6.4]. Ebenso ist eine Komodul-Algebren-Struktur $\alpha : A \to A \otimes H$ durch eine Operation $X_A \times X_H \to X_A$ gegeben, und A ist genau dann eine H-Galois-Algebra, wenn die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} X_A \times X_H & \longrightarrow & X_A \times X_A \times X_H & \longrightarrow & X_A \times X_A \\ (x, g) & \longmapsto & (x, x, g) & \longmapsto & (x, x \cdot g) \end{array}$$

bijektiv ist, d.h. X_H einfach-transitiv auf X_A operiert.

I.2. Der Funktor Gal

Von hier ab wollen wir alle Hopf-Algebren als endlich, kommutativ und kokommutativ voraussetzen. R-**Hopf-Alg** bezeichne die zugehörige Kategorie.

2.1. Definition:

a) Seien X und Y H-Komodul-Algebren. Eine R-Algebren-Abbildung $f : X \to Y$ heißt ein *Morphismus von H-Komodul-Algebren,* falls sie H-kolinear ist, d.h. falls

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Big\downarrow \chi & & \Big\downarrow \upsilon \\ X \otimes H & \xrightarrow{f \otimes 1} & Y \otimes H \end{array}$$

kommutiert. Sind sowohl X als auch Y H-Galois-Algebren, so nennen wir f auch einen *H-Galois-Morphismus.* Die Kategorie der H-Komodul-Algebren bezeichnen wir mit H-**Komod-Alg**.

b) $\mathrm{Gal}\,(R, H)$, oder kurz $\mathrm{Gal}\,(H)$, bezeichne die Menge der H-Galois-Isomorphieklassen von H-Galois-Algebren und, $\mathrm{Gal}_c(R, H)$ bzw. $\mathrm{Gal}_c(H)$ die Teilmenge der kommutativen H-Galois-Algebren.

2.2. Proposition:
Sei $f : X \to Y$ ein H-Galois-Morphismus. Dann ist f ein Isomorphismus.

Beweis: Für den Fall eines Grundkörpers K folgt die Behauptung aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \otimes X & \xrightarrow{f \otimes f} & Y \otimes Y \\ \Big\downarrow \tilde{\chi} & & \Big\downarrow \tilde{\upsilon} \\ X \otimes H & \xrightarrow{f \otimes 1} & Y \otimes H, \end{array}$$

indem man den Rang von f betrachtet: Man hat $\mathrm{rg}(f) \cdot \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f) \cdot \dim H$. Da $\dim X = \dim H = \dim Y$ und $\mathrm{rg}(f) \geq 1$ (da $f \in$**Alg**), folgt $\mathrm{rg}(f) = \dim H$ und somit f bijektiv.
Der allgemeine Fall folgt hieraus durch Lokalisierung und anschließendem Übergang zum Restklassenkörper: Zunächst erhält man so die Surjektivität von f. Da Y endlich-erzeugt projektiv ist, besitzt f einen R-linearen Schnitt, der nach dem gleichen Argument surjektiv ist. $\diamondsuit$

Sei nun $\varphi : G \to H$ ein Morphismus von Hopf-Algebren. φ induziert einen Vergiß-Funktor

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{V}_\varphi : & G - \textbf{Komod-Alg} & \longrightarrow & H - \textbf{Komod-Alg} \\ & (Y \to Y \otimes G) & \longmapsto & (Y \to Y \otimes G \to Y \otimes H). \end{array}$$

($\mathcal{V}_\varphi$ entspricht dem von $\varphi^* : H^* \to G^*$ induzierten Vergiß-Funktor von den G^*-Modul-Algebren in die H^*-Modul-Algebren). Aus einer Rang-Betrachtung erkennt man sofort, daß $\mathcal{V}_\varphi$ nur dann Galois-Algebren erhält, wenn φ ein Isomorphismus ist. Es gilt jedoch:

2.3. Satz:
$\mathcal{V}_\varphi$ besitzt einen rechtsadjungierten Funktor $\mathcal{R}_\varphi$. Dieser führt H-Galois-Algebren in G-Galois-Algebren über. Ferner ist $\mathcal{R}_\varphi(A)$ kommutativ, falls A kommutativ ist.

Da der Beweis dieses Satzes etwas technisch und für die weiteren Überlegungen nur von untergeordneter Bedeutung ist, verschieben wir ihn an das Ende dieses Abschnittes und erwähnen hier nur, daß eine mögliche Realisierung von $\mathcal{R}_\varphi$ durch $\mathcal{R}_\varphi(X) = \mathrm{Hom}_{H^*}(G^*, X)$ (mit einer geeigneten G^*-Modul-Algebren-Struktur) gegeben ist. Wir werden von dieser speziellen Realisierung jedoch keinen Gebrauch machen, sondern $\mathcal{R}_\varphi(X)$ durch seine kouniverselle Eigenschaft charakterisieren.

2.4. Sprechweise:
Wir nennen einen Morphismus $f : \mathcal{V}_\varphi(X) \to Y$ auch eine *φ-Komodul-Algebren-Abbildung* von X nach Y. Ebenso sprechen wir von einem *φ-Galois-Morphismus,* falls sowohl X als auch Y Galois-Algebren sind. Nach Definition von $\mathcal{V}_\varphi$ ist $f \in$ **Alg** genau dann ein φ-Komodul-Algebren-Morphismus, wenn folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \big\downarrow \chi & & \big\downarrow \upsilon \\ X \otimes G & \xrightarrow{f \otimes \varphi} & Y \otimes H. \end{array}$$

2.5. Folgerung:
Zu jedem $[X] \in \mathrm{Gal}\,(H)$ und jedem $\varphi : G \to H$ in **Hopf-Alg** *gibt es genau ein $[Y] \in \mathrm{Gal}\,(G)$, welches einen φ-Galois-Morphismus nach X gestattet, nämlich $[Y] := [\mathcal{R}_\varphi(X)]$. Wir setzen $\mathrm{Gal}\,(R, \varphi)([X]) := [Y]$.*

Beweis: Sei zunächst $\chi : X \to X \otimes H$ eine beliebige H-Komodul-Algebra und $Y := \mathcal{R}_\varphi(X)$. Aus der Adjungiertheit von $\mathcal{R}_\varphi$ und $\mathcal{V}_\varphi$ folgt die Existenz einer natürlichen φ-Komodul-Algebren-Abbildung $\rho : Y \to X$. Dieses ρ ist kouniversell, d.h. zu gegebener φ-Komodul-Algebren-Abbildung $f : Z \to X$ gibt es genau eine G-Komodul-Algebren-Abbildung $g : Z \to Y$ mit $f = \rho \circ g$.
Ist nun X eine H-Galois-Algebra, so ist Y nach obigem Satz eine G-Galois-Algebra und ρ ein φ-Galois-Morphismus. Ferner ist Y durch die Existenz von ρ bis auf einen G-Galois-Isomorphismus eindeutig bestimmt, denn ist $\rho' : Y' \to X$ ein weiterer φ-Galois-Morphismus, so gibt es also ein $g : Y \to Y'$ in G-**Komod-Alg** mit $\rho' = \rho \circ g$. Dieses g ist aber als G-Galois-Morphismus bereits ein Isomorphismus. $\diamondsuit$

2.6. Folgerung:
Durch $H \mapsto \mathrm{Gal}\,(R, H)$ und $\varphi \mapsto \mathrm{Gal}\,(R, \varphi)$ wird ein kontravarianter mengenwertiger Funktor

$$\mathrm{Gal}\,(R, -) \ : \ R\text{-}\mathbf{Hopf\text{-}Alg} \longrightarrow \mathbf{Me}$$

mit Unterfunktor

$$\mathrm{Gal}_c(R, -) \ : \ R\text{-}\mathbf{Hopf\text{-}Alg} \longrightarrow \mathbf{Me}$$

definiert.

Beweis: Sei $X \in \mathrm{Gal}(H)$. Zu zeigen sind $\mathrm{Gal}(\mathrm{id}_H)(X) = X$ und $\mathrm{Gal}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Gal}(\varphi) \circ \mathrm{Gal}(\psi)$. Ersteres folgt daraus, daß id_X ein id_H-Galois-Morphismus ist. Sei $Y = \mathrm{Gal}(\psi)(X)$ und $Z = \mathrm{Gal}(\varphi)(Y)$. Es gibt also einen ψ- bzw. φ-Galois-Morphismus $Y \to X$ bzw. $Z \to Y$. Offensichtlich ist dann $Z \to Y \to X$ ein $\psi \circ \varphi$-Galois-Morphismus, also $Z = \mathrm{Gal}(\psi \circ \varphi)$. $\diamondsuit$

2.7. Beispiele:

1) Ist $X = \bigoplus_{\pi \in \Pi} X_\pi$ vollgraduiert über der endlichen abelschen Gruppe Π und $\Pi_0 \leq \Pi$ eine Untergruppe, so ist $Y = \bigoplus_{\pi \in \Pi_0} X_\pi$ vollgraduiert über Π_0, und die Inklusion $Y \hookrightarrow X$ ist ein $(\iota : R[\Pi_0] \hookrightarrow R[\Pi])$-Galois-Morphismus. Folglich gilt $\mathrm{Gal}(\iota)([X]) = [Y]$.

2) Ist L/K eine klassische Galois-Erweiterung mit abelscher Galois-Gruppe Π und $\Pi_0 \leq \Pi$ eine Untergruppe, so ist $M := \mathrm{Fix}(\Pi_0)$ eine $\Pi_1 := \Pi/\Pi_0$-Galois-Erweiterung von K. Es ist $[M] = \mathrm{Gal}(\pi^* : K[\Pi_1]^* \hookrightarrow K[\Pi]^*)([L])$, falls $\pi : K[\Pi] \to K[\Pi_1]$ die kanonische Surjektion bezeichnet. Für eine Verallgemeinerung dieser beiden Beispiele vergleiche man Proposition 2.17.

3) Ist φ ein Automorphismus mit Inversem ψ, so ist

$$\mathrm{Gal}(\varphi)(X) = \mathcal{V}_\psi(X) = (X \to X \otimes H \xrightarrow{1 \otimes \psi} X \otimes H),$$

denn die Identität auf X ist ein φ-Galois-Morphismus von $\mathcal{V}_{\varphi^{-1}}(X)$ nach X. So ist beispielsweise $\mathrm{Gal}(\tau)([X \otimes Y]) = [Y \otimes X]$, falls $\tau : H \otimes H \to H \otimes H$ die Vertauschungsabbildung bezeichnet und X und Y H-Galois-Algebren sind.

4) Für $A \in \mathrm{Gal}_c(H)$ ist $\mathrm{Gal}_c(\nabla : H \otimes H \to H)(A) = A \otimes A$: Die Multiplikations-Abbildung $m : A \otimes A \to A$ ist ein ∇-Galois-Morphismus. Eine Beschreibung von $\mathrm{Gal}(\nabla)(X)$ werden wir später angeben (vgl. Bemerkung 3.17).

Für eine kommutative und kokommutative Hopf-Algebra H sind die Struktur-Abbildungen Δ, ε und S in **Hopf-Alg**. Diese induzieren eine Gruppenstruktur auf der Menge $\mathrm{Gal}(H)$:

2.8. Proposition:

Durch

$$\begin{array}{lll} [X] \star [Y] & := \mathrm{Gal}(\Delta)([X \otimes Y]) & ([X],[Y] \in \mathrm{Gal}(H)) \\ [E_H] & := \mathrm{Gal}(\varepsilon)([R]) = [H] & \textit{(neutrales Element)} \\ [X]^{-1} & := \mathrm{Gal}(S)([X^{\mathrm{op}}]) & ([X] \in \mathrm{Gal}(H)). \end{array}$$

wird $\mathrm{Gal}(H)$ *eine abelsche Gruppe mit Untergruppe* $\mathrm{Gal}_c(H)$. $\mathrm{Gal}(-)$ *und* $\mathrm{Gal}_c(-)$ *werden hierdurch Funktoren mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen.*

Beweis: Die Assoziativität dieser Verknüpfung folgt aus der Koassoziativität von Δ: $(\Delta \otimes 1) \circ \Delta = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$. Ebenso folgt aus $\tau \circ \Delta = \Delta$ bzw. $(1 \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}_H$, daß $X \star Y = Y \star X$ und $X \star E_H = X$ gelten. Wir bemerken, daß $E_H = [H]$ gilt: $\varepsilon : H \to R$ ist ein ε-Galois-Morphismus.

Daß X^{-1} invers zu X ist, erhält man für $X = A$ kommutativ genauso einfach aus der Gleichung $\nabla \circ (\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$: Wie wir bereits gesehen haben, ist $\mathrm{Gal}_c(\nabla)(A) = A \otimes A$ und damit $\mathrm{Gal}_c(\nabla \circ (\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \Delta)(A) = A \star A^{-1}$, während $\mathrm{Gal}_c(\eta \circ \varepsilon)(A) = \mathrm{Gal}_c(\varepsilon)(R) = E_H$ gilt. Im allgemeinen ist jedoch $\mathrm{Gal}\,(\nabla)(X) \neq X \otimes X$, und wir müssen einen anderen Weg einschlagen: Obgleich $\tilde{\chi}$ nur für kommutatives X eine Algebren-Abbildung darstellt, überzeugt man sich leicht, daß die Einschränkung von $\tilde{\chi}^{-1}$ auf $H = R \otimes H \subset X \otimes H$ eine Algebren-Abbildung $H \to X \otimes X^{\mathrm{op}}$ induziert, welche einen $(\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \Delta$-Galois-Morphismus darstellt ($\tilde{\chi}$ ist ein $\tilde{\Delta}$-Komodul-Morphismus).
Daß $\mathrm{Gal}\,(\varphi)$ für $\varphi \in$ **Hopf-Alg** ein Gruppen-Homomorphismus ist, folgt daraus, daß φ insbesondere mit der Koalgebren-Struktur verträglich ist. $\diamondsuit$

2.9. Bemerkung:
Diese Gruppenstruktur wurde für kommutative Galois-Erweiterungen mit abelscher Galois-Gruppe von Harrison [Har1, Har2] untersucht. Man spricht daher in diesem Zusammenhang auch von der Harrison-Gruppe bzw. dem Harrison-Produkt „$\star$“. Über einem Grundkörper war diese Gruppe schon zuvor von Hasse [Has] beschrieben worden. Die Verallgemeinerung auf kommutative Galois-Algebren in dem hier verwandten Sinn geht auf Chase und Sweedler [Ch-Sw] zurück. Im Fall nichtkommutativer Galois-Algebren mit abelscher Galois-Gruppe vergleiche man [Gar-Or, S.242f.]; dort wird das inverse Element jedoch mit $[X]^{-1} = \mathrm{Gal}\,(S)([X])$ angegeben, was sich etwa für Normrest-Algebren (= zyklische Algebren im Kummer-Fall, s.u.) der Ordnung größer 2 als nicht zutreffend herausstellt.

2.10. Bemerkung und Notation:
Bekanntlich ist R-**Hopf-Alg** eine additive Kategorie (natürlich nur mit *endlichen* Produkten und Koprodukten):

i) Für $G, H \in R$-**Hopf-Alg** ist $\text{Hopf-Alg}\,(G,H)$ eine abelsche Gruppe bezüglich der sogenannten Konvolution
$$(\varphi * \psi)(g) := \sum_{(g)} \varphi(g_{(1)}) \cdot \psi(g_{(2)}) \qquad (\varphi, \psi \in \text{Hopf-Alg}\,(G,H),\ g \in G).$$
Neutrales Element ist $[0] := \eta_H \circ \varepsilon_G$, und $[-]\varphi := S_H \circ \varphi = \varphi \circ S_G$ ist invers zu φ (wir lassen die eckigen Klammern meist weg; da weder die Nullabbildung noch die (modultheoretische) Inverse einer Hopf-Algebren-Abbildung in **Hopf-Alg** liegen, sollte dies zu keinen Verwechslungen führen).

ii) Die Komposition von Abbildungen induziert eine biadditive Abbildung
$\text{Hopf-Alg}\,(G,H) \times \text{Hopf-Alg}\,(H,J) \longrightarrow \text{Hopf-Alg}\,(G,J)$.

iii) Zu $G_1, \ldots, G_n$ ist das Biprodukt durch $H := G_1 \otimes \ldots \otimes G_n$ zusammen mit den Inklusionen
$$\eta_i : G_i \to H, \quad g_i \mapsto 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes g_i \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1$$
und den Projektionen
$$\varepsilon_i : H \to G_i, \quad g_1 \otimes \ldots \otimes g_n \mapsto \prod_{j \neq i} \varepsilon(g_j)\, g_i$$
gegeben.

Dies wird für uns in zweifacher Hinsicht von Bedeutung sein:

1. Für $H \in R$-**Hopf-Alg** ist
$$\text{Hopf-End}\,(H) := \text{Hopf-Alg}\,(H,H)$$
ein Ring (mit Addition $*$ und Multiplikation $\circ$). Für ganzzahliges n schreiben wir
$$[n] := \begin{cases} id * \ldots * id & \text{falls } n > 0 \\ \eta \circ \varepsilon & \text{falls } n = 0 \\ S * \ldots * S & \text{falls } n < 0. \end{cases}$$
Die kleinste natürliche Zahl e mit $[e] = [0]$ wird (falls existent) der Exponent von H genannt. Ist H von konstantem Rang r über R, so besitzt H einen Exponenten und dieser ist ein Teiler von r [Ta-Oo, S.4].
2. Sind $G = G_1 \otimes \ldots \otimes G_r$ und $H = H_1 \otimes \ldots \otimes H_s$ fest vorgegebene Produktdarstellungen von G und H, so können wir eine Hopf-Algebren-Abbildung $\varphi : G \to H$ durch eine Matrix beschreiben: Setzen wir
$$\varphi_{i,j} := \varepsilon_i \circ \varphi \circ \eta_j \;:\; G_j \longrightarrow H_i \qquad (\,1 \le i \le s,\, 1 \le j \le r\,)$$
und ordnen φ die $s \times r$-Matrix $(\,\varphi_{i,j}\,)_{i,j}$ zu, so gilt
$$\varphi \;=\; \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} \eta_i \circ \varphi_{i,k} \circ \varepsilon_j$$
(wir stellen uns also die Elemente von G bzw. H als „*Spalten*vektoren" der Länge r bzw. s vor).
Wir merken noch an, daß diese Beschreibung von φ durch seine „darstellende Matrix" mit der Dualbildung in folgendem Sinne verträglich ist: Die zu φ duale Abbildung
$$\varphi^* : H^* \cong H_1^* \otimes \ldots \otimes H_s^* \longrightarrow G_1^* \otimes \ldots \otimes G_r^* \cong G^*$$
wird durch die „dualisiert-transponierte" $r \times s$-Matrix $\big(\,(\varphi_{i,j})^*\,\big)_{j,i}$ beschrieben.

2.11. Folgerung:
$\mathrm{Gal}_c(H)$ *ist vermöge* $[A] \cdot \varphi := \mathrm{Gal}_c(\varphi)([A])$ *ein* Hopf-End$\,(H)$*-Rechtsmodul.*

Beweis: Fraglich ist lediglich die Gültigkeit der Distributivgesetze: Während
$$\begin{aligned} ([A] \star [B]) \cdot \varphi \;&=\; \mathrm{Gal}_c(\Delta \circ \varphi)\,([A \otimes B]) \\ &=\; \mathrm{Gal}_c\big((\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta\big)\,([A \otimes B]) \\ &=\; ([A] \cdot \varphi) \star ([B] \cdot \varphi) \end{aligned}$$
ganz allgemein auch im nicht-kommutativen Fall erfüllt ist, benötigt man für
$$\begin{aligned} ([A]) \cdot (\varphi * \psi) \;&=\; \mathrm{Gal}_c(\nabla \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta)\,([A]) \\ &=\; \mathrm{Gal}_c((\varphi \otimes \psi) \circ \Delta)\,([A \otimes A]) \\ &=\; ([A] \cdot \varphi) \star ([A] \cdot \psi) \end{aligned}$$
die Eigenschaft $\mathrm{Gal}_c(\nabla)([A]) = [A \otimes A]$. $\diamondsuit$

2.12. Folgerung:

a) *Jede kommutative $H_1 \otimes \ldots \otimes H_s$-Galois-Algebra A ist von der Form*

$$[A] \;=\; [A_1 \otimes \ldots \otimes A_s]$$

mit eindeutig bestimmten $[A_j] \in \mathrm{Gal}_c(H_j)$.

b) *Ist $\varphi : G_1 \otimes \ldots \otimes G_r \to H = H_1 \otimes \ldots \otimes H_s$ eine Hopf-Algebren-Abbildung mit Matrix $\varphi = (\varphi_{i,j})$, so gilt*

$$\mathrm{Gal}_c(\varphi)\,([A_1 \otimes \ldots \otimes A_s]) \;=\; [B_1 \otimes \ldots \otimes B_r]\,,$$

mit Komponenten

$$[B_j] \;=\; \mathop{\star}_{i=1}^{s} \mathrm{Gal}_c(\varphi_{i,j})\,([A_i])\,.$$

In suggestiver Schreibweise gilt also

$$([B_1] \otimes \ldots \otimes [B_r]) \;=\; ([A_1] \otimes \ldots \otimes [A_s]) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{s,1} & \cdots & \varphi_{s,r} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Für $[A] \in \mathrm{Gal}_c(H)$ setzt man $A_i := \mathrm{Gal}_c(\eta_i)([A])$. Dann gibt es η_i-Galois-Morphismen $f_i : A_i \to A$, und man erhält einen H-Galois-Morphismus

$$\begin{array}{cccc} f & : & A_1 \otimes \ldots \otimes A_s & \longrightarrow & A \\ & & a_1 \otimes \ldots \otimes a_s & \longmapsto & \prod_{i=1}^{s} f_i(a_i). \end{array}$$

Die behauptete Eindeutigkeit der $[A_i]$ folgt aus $A_i = \mathrm{Gal}_c(\eta_i)([A_1 \otimes \ldots \otimes A_n])$.
Für die Komponenten $[B_k]$ von $[B] := \mathrm{Gal}_c(\varphi)([A]) =$ folgt:

$$\begin{aligned} [B_k] &= \mathrm{Gal}_c(\eta_k) \circ \mathrm{Gal}_c(\varphi)\,([A]) \\ &= \mathrm{Gal}_c(\varphi \circ \eta_k)\,([A]) \\ &= \mathrm{Gal}_c\Big(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} \eta_i \circ \varphi_{i,j} \circ \varepsilon_j \circ \eta_k\Big)\,([A]) \\ &= \mathrm{Gal}_c\Big(\sum_{i=1}^{s} \eta_i \circ \varphi_{i,k}\Big)\,([A]) \\ &= \mathop{\star}_{i=1}^{s} \mathrm{Gal}_c(\varphi_{i,k})\,([A_i]) \end{aligned}$$

◊

2.13. Beispiele:

1) Sei $H = R[C_n]$ der Gruppenring zur zyklischen Gruppe der Ordnung n mit Erzeuger σ. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist jede H- Galois-Algebra kommutativ. Über einem lokalen Ring R ist

$$\begin{array}{ccc} U(R)/U(R)^n & \longrightarrow & \mathrm{Gal}_c(R, R[C_n]) \\ [a] & \longmapsto & \big[\, R[X]/(X^n - a)\,\big] \end{array}$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen. Über einem beliebigen Grundring ist diese Abbildung zwar injektiv, aber nicht surjektiv: Ihr Kokern ist isomorph zum n-Torsionsteil der Picard-Gruppe von R.

2) Für $H = K^{C_n}$ läßt sich die Harrison-Gruppe nicht so einfach beschreiben: Da der Endomorphismenring von H isomorph zu $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ist, wird $\mathrm{Gal}_c(K, H)$ von n annuliert. Dies folgt auch aus der von HARRISON [Har2] angegebenen Beschreibung der Harrison-Gruppe zur endlichen abelschen Gruppe Π:

$$\mathrm{Gal}_c(K, K^{\Pi}) \;\cong\; \mathbf{Gr}\,(\,\mathrm{Gal}\,(K_s/K),\, \Pi\,).$$

Zwei Spezialfälle verdienen besondere Beachtung:

i) KUMMER-Fall:
Ist n prim zur Charakteristik von K und enthält K eine primitive n-te Einheitswurzel ζ, so ist

$$K^{C_n} \;\cong\; K[C_n] \quad \text{vermöge} \quad e_{\sigma^i} \;\mapsto\; \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{j\cdot i}\cdot\sigma^j\,,$$

und wir erhalten wie in Beispiel 1)

$$\mathrm{Gal}_c(K, K^{C_n}) \;\cong\; U(K)/U(K)^n$$

(beide Isomorphismen hängen von der Wahl der Einheitswurzel ζ ab).

ii) ARTIN-SCHREIER-WITT-Fall:
Besitzt K die positive Charakteristik p und ist $n = p^e$ eine Potenz von p, so gilt [Wi, Th.3.10.3]

$$\mathrm{Gal}_c(K, K^{C_n}) \;\cong\; W_e(K)/(\pi - 1)W_e(K),$$

wobei $W_e(K)$ den Ring der Witt-Vektoren der Länge e über K und $(\pi - 1)W_e(K)$ die additive Untergruppe

$$(\pi - 1)W_e(K) \;=\; \{\, (x_0^p, \ldots, x_{e-1}^p) - (x_0, \ldots, x_{e-1}) \,|(x_0, \ldots, x_{e-1}) \in W_e(K)\,\}$$

bezeichnet.

3) Wie in Beispiel 1.9.6 sei $H = K[D]/(D^p)$ mit $p = \mathrm{char}(K) > 0$. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} K/K^p & \longrightarrow & \mathrm{Gal}_c(K,H) \\ [a] & \longmapsto & \big[\, R[X]/(X^p - a) \,\big] \end{array}$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen. Im Fall $n = 1$ ist Hopf-End$\,(H) \cong K$ (für $r \in K$ wird das primitive Element $\bar{D}$ auf $r \cdot \bar{D}$ abgebildet), und die K-Vektorraum-Struktur auf $\mathrm{Gal}_c(K,H)$ nach Folgerung 2.11 ist durch $[a] \cdot r = [r^p \cdot a]$ gegeben.

4) Die Harrison-Gruppe $\mathrm{Gal}_c(K,H)$ zur Hopf-Algebra H läßt sich auch kohomologisch beschreiben [Wa,18.4]: Es gilt

$$\mathrm{Gal}_c(K,H) \;\cong\; H^1\,(\,\bar{K}/K,\, G\,),$$

wobei die rechte Seite die erste Amitsur-Kohomologie-Gruppe des algebraischen Abschlusses $\bar{K}$ von K bezüglich der zu H gehörenden endlichen, algebraischen Gruppe $G = \mathbf{Alg}_c(H, -)$ bezeichne.
Für eine separable Hopf-Algebra H genügt es hierbei, den separablen Abschluss K_s anstelle von $\bar{K}$ heranzuziehen, so daß mit $\Gamma := \mathrm{Gal}\,(K_s/K)$

$$\mathrm{Gal}_c(K,H) \;\cong\; H^1\,(\,\Gamma,\, G(K_s)\,) \tag{2.14}$$

folgt [Wa,Th.17.8]. Hierbei ist $G(K_s) = X_H$ der zur separablen Hopf-Algebra H gehörende Γ-Modul nach Beispiel 1.9.7.

Der Isomorphismus $\mathrm{Gal}_c(K,H) \cong H^1\,(\Gamma, G(K_s))$ läßt sich in der Sprache der Γ-Mengen wie folgt interpretieren (wir schreiben im folgenden auch kurz $\hat{H}$ anstelle von X_H):

Ist A eine H-Galois-Algebra, so operiert $\hat{H}$ einfach-transitiv auf $\hat{A}$ (wir schreiben sowohl die Addition in $\hat{H}$ als auch die Operation von $\hat{H}$ auf $\hat{A}$ additiv). Fixiert man nun ein Element a in $\hat{A}$, so erhält man eine Bijektion

$$f_a \,:\, \hat{H} \ni h \,\mapsto\, h + a \in \hat{A}\,,$$

welche bis auf den Trivialfall $[A] = [H]$ nicht Γ-linear ist.
Identifizieren wir vielmehr $\hat{A}$ mit $\hat{H}$ vermöge f_a und schreiben
   ${}^{\gamma}h$ für die Operation von γ auf $h \in \hat{A}$ und
   $\gamma \cdot h$ für die Operation von γ auf $h \in \hat{H}$,
so ist durch

$$z(\gamma) := {}^{\gamma}h - \gamma \cdot h = {}^{\gamma}(h - h) = {}^{\gamma}0$$

(das zweite Gleichheitszeichen folgt aus der Γ-Linearität der Operation von $\hat{H}$ auf $\hat{A}$) eine von der Wahl von h aus $\hat{H}$ unabhängige Abbildung $z : \Gamma \to \hat{H}$ gegeben. Dieses z ist ein 1-Kozykel, denn für $\gamma, \delta \in \Gamma$ gilt:

$$z(\gamma \cdot \delta) \;=\; {}^{\gamma\cdot\delta}0 \;=\; \gamma \cdot {}^{\delta}0 + z(\gamma) \;=\; \gamma \cdot z(\delta) + z(\gamma).$$

Man rechnet leicht nach, daß die Kohomologieklasse von z nicht von der Wahl des Elementes a in $\hat{A}$ abhängt.
Ist umgekehrt ein 1-Kozykel $z : \Gamma \to \hat{H}$ gegeben, so operiert Γ auf der *Menge* $X := \hat{H}$ vermöge

$$^{\gamma}h := \gamma \cdot h + z(\gamma)$$

derart, daß die Translationsabbildung $X \times \hat{H} \to X$ Γ-linear ist.
Wir zeigen noch, daß die so erhaltene Bijektion von $\mathrm{Gal}_c(K, H)$ mit $H^1(\Gamma, \hat{H})$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen ist. Hierzu seien 1-Kozykel z und z' vorgegeben. Zu z bzw. z' bzw. $z + z'$ bezeichnen X bzw. X' bzw. Y die zugehörigen Γ-Strukturen auf der Grundmenge $\hat{H}$. Dann ist durch

$$\begin{array}{rccc} p: & X \times X' & \longrightarrow & Y \\ & (x, x') & \longmapsto & x + x' \end{array}$$

eine Γ-lineare Abbildung mit $p(h + x, h' + x') = h + h' + p(x, x')$ gegeben, woraus die Behauptung $Y = X \star X'$ folgt.

Damit ist das Ziel dieses Abschnittes erreicht und wir widmen uns nun dem Beweis von Satz 2.3. Hierzu benötigen wir jedoch noch ein paar Vorbereitungen:

2.15. Definition:
Seien $H \in R$-**Hopf-Alg** und $\chi : X \to X \otimes H$ ein H-Komodul, welcher als R-Modul flach sei. Sei ferner $G \subset H$ eine endliche Unter-Hopf-Algebra von H. Wir nennen $X^G := \chi^{-1}(X \otimes G)$ die Menge der *G-koinvarianten Elemente* von X.

Die Voraussetzung, daß X flach ist, stellt sicher, daß $X \otimes G \to X \otimes H$ wirklich eine Inklusion ist. Ferner sei bemerkt, daß für eine H-Komodul-Algebra X die G-koinvarianten Elemente offenbar eine Unter-Algebra bilden.

2.16. Lemma:
a) *Seien X ein R-flacher H-Komodul, $G \subset H$ eine Unter-Hopf-Algebra und M ein flacher R-Modul. Dann gilt $(M \otimes X)^G = M \otimes (X^G)$.*
b) *Seien X_i R-flache H_i-Komoduln und $G_i \subset H_i$ Unter-Hopf-Algebren mit $X_i^{G_i}$ flach über R $(i = 1, 2)$. Dann gilt $(X_1 \otimes X_2)^{G_1 \otimes G_2} = X_1^{G_1} \otimes X_2^{G_2}$.*

Beweis: Zu a): Faßt man X vermöge $\chi : X \to X \otimes H$ als Untermodul von $X \otimes H$ auf (wegen $(1 \otimes \varepsilon) \circ \chi = 1$ ist χ injektiv), so gilt $X^G = X \cap (X \otimes G)$. Da M flach ist, erhält $M \otimes -$ Durchschnitte.
Zu b): Es ist

$$\begin{aligned} (X_1 \otimes X_2)^{G_1 \otimes G_2} &= (X_1 \otimes X_2)^{G_1 \otimes R} \cap (X_1 \otimes X_2)^{R \otimes G_2} \\ &= (X_1^{G_1} \otimes X_2) \cap (X_1 \otimes X_2^{G_2}) \\ &= X_1^{G_1} \otimes X_2^{G_2}, \end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen nach Teil a) und das dritte auf Grund der vorausgesetzten Flachheit von $X_i^{G_i}$ gelten. $\diamondsuit$

2.17. Proposition:
Seien $\chi : X \to X \otimes H$ eine H-Galois-Algebra und $G \subset H$ eine endliche Unter-Hopf-Algebra von H. Dann ist $X^G := \chi^{-1}(X \otimes G)$ eine G-Galois-Algebra.

Beweis: Für $X = H$ ist die Behauptung offensichtlich, denn $\Delta^{-1}(H \otimes G) = G$ ($\Delta(h) \in H \otimes G$ impliziert $h = \sum \varepsilon(h_{(1)})\, h_{(2)} \in G$).
$Y := X^G$ ist treuflacher R-Modul: $\tilde{\chi} : X \otimes X \to X \otimes H$ ist ein Isomorphismus von H-Komoduln (mit den H-Strukturen $1 \otimes \chi$ bzw. $1 \otimes \Delta$). Folglich stimmen die G-koinvarianten Elemente überein: $X \otimes Y \cong X \otimes G$. Mit X und G treuflach folgt hieraus $X \otimes Y$ und damit Y treuflach.
Wie bereits erwähnt, ist $\tilde{\chi} : X \otimes X \to X \otimes H$ ein $\tilde{\Delta}$-Komodul-Morphismus. Da $\tilde{\Delta}$ ein Isomorphismus ist und $\tilde{\Delta}(G \otimes G) = G \otimes G$ gilt, induziert $\tilde{\chi}$ einen Isomorphismus der $G \otimes G$-koinvarianten Elemente:

$$\tilde{\chi} : Y \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes G.$$

Hieraus entnimmt man erstens, daß χ zu einer G-Komodul-Algebren-Struktur auf Y einschränkt (also $\chi(Y) \subset Y \otimes G$), und zweitens, daß Y mit dieser G-Struktur eine G-Galois-Algebra ist. $\diamondsuit$

Beweis von Satz 2.3: Sei $\varphi : G \to H$ in **Hopf-Alg** gegeben. Für eine H-Komodul-Algebra X bezeichne $\mathcal{R}_\varphi(X)$ den Differenzkern der Abbildungen $\rho, \sigma : X \otimes G \to X \otimes H \otimes G$, wobei $\rho := \chi \otimes \mathrm{id}_G$ und $\sigma := id_X \otimes \big((\varphi \otimes 1) \circ \Delta\big)$. Da ρ und σ Algebren-Abbildungen sind, ist $\mathcal{R}_\varphi(X) \in$ **Alg**. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \mathcal{R}_\varphi(X) & \to & X \otimes G & \overset{\rho}{\underset{\sigma}{\rightrightarrows}} & X \otimes H \otimes G \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes\Delta} & & \big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes 1\otimes\Delta} \\
0 & \to & \mathcal{R}_\varphi(X) \otimes G & \to & X \otimes G \otimes G & \overset{\rho\otimes 1}{\underset{\sigma\otimes 1}{\rightrightarrows}} & X \otimes H \otimes G \otimes G
\end{array}$$

erhält man eine G-Komodul-Algebra-Struktur auf $\mathcal{R}_\varphi(X)$.
Ist ferner Y eine G-Komodul-Algebra, so ist

$$\begin{array}{ccc}
H\text{-}\mathbf{Komod\text{-}Alg}\big(\mathcal{V}_\varphi(Y), X\big) & \cong & G\text{-}\mathbf{Komod\text{-}Alg}\big(Y, \mathcal{R}_\varphi(X)\big) \\
f & \leftrightarrow & g,
\end{array}$$

wobei $g(y) = \sum_{(y)} f(y_{(0)}) \otimes y_{(1)}$ bzw. $f(y) = (1 \otimes \varepsilon)(g(y))$. Man überzeugt sich leicht, daß hierdurch ein in X und Y bifunktorieller Isomorphismus definiert wird, d.h. daß $\mathcal{R}_\varphi$ rechtsadjungiert zu $\mathcal{V}_\varphi$ ist.
Bezeichne $\Phi : H \otimes G \to H \otimes G$ die durch $\Phi(h \otimes g) := \sum_{(g)} h \cdot \varphi(g_{(1)}) \otimes g_{(2)}$ definierte Abbildung. Φ ist ein Hopf-Algebren-Automorphismus mit inversem Automorphismus $\Psi(h \otimes g) := \sum_{(g)} h \cdot \varphi(S(g_{(1)})) \otimes g_{(2)}$. Sei nun X eine H-Galois-Algebra. Dann ist $X \otimes G$ und somit auch $\mathcal{V}_\Psi(X \otimes G)$ eine $H \otimes G$-Galois-Algebra, und man überzeugt sich leicht, daß $\mathcal{R}_\varphi(X)$ genau aus den $G = R \otimes G$-koinvarianten Elementen von $\mathcal{V}_\Psi(X \otimes G)$ besteht. Folglich ist $\mathcal{R}_\varphi(X)$ eine G-Galois-Algebra. $\diamondsuit$

I.3. Kommutator-Paarung und Smash-Produkte

Seien $G, H \in$ **Hopf-Alg** zwei Hopf-Algebren über R.

3.1. Definition:
Eine Abbildung $\vartheta : G \otimes H \to R$ heißt eine *Paarung von Hopf-Algebren* (oder kurz eine *Hopf-Paarung*), falls für $g, g' \in G$ und $h, h' \in H$ gelten (wir schreiben $\vartheta(g,h) := \vartheta(g \otimes h)$):
i) $\vartheta(g \cdot g', h) = \sum \vartheta(g, h_{(1)})\, \vartheta(g', h_{(2)})$,
ii) $\vartheta(g, h \cdot h') = \sum \vartheta(g_{(1)}, h)\, \vartheta(g_{(2)}, h')$,
iii) $\vartheta(g, 1) = \varepsilon(g)$ und $\vartheta(1, h) = \varepsilon(h)$,
d.h. falls G die Algebra H nach R sowie H die Algebra G nach R mißt (vgl. 1.6). Es bezeichne

$$\text{Hopf-Paar}\,(G,H) := \{\vartheta \in (G \otimes H)^* \mid \vartheta \text{ Hopf-Paarung } \}$$

die Menge aller Hopf-Paarungen von G mit H.

3.2. Bemerkung:
Hopf-Paar (G,H) ist eine Untergruppe der Einheitengruppe der Algebra $(G \otimes H)^*$ (Das Einselement $\varepsilon_G \cdot \varepsilon_H$ nennen wir auch die triviale Hopf-Paarung; invers zu ϑ ist $\vartheta'(g,h) := \vartheta(S(g), h)$). Durch $\mathcal{L}(\vartheta)\,(g)\,(h) := \vartheta(g,h)$ und $\mathcal{R}(\vartheta)\,(h)\,(g) := \vartheta(g,h)$ werden Gruppenisomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : &\quad \text{Hopf-Paar}\,(G,H) \xrightarrow{\sim} \text{Hopf-Alg}\,(G, H^*) \quad \text{und} \\ \mathcal{R} : &\quad \text{Hopf-Paar}\,(G,H) \xrightarrow{\sim} \text{Hopf-Alg}\,(H, G^*) \end{aligned}$$

definiert, wobei für $\vartheta \in$ Hopf-Paar (G,H) gilt:

$$\big(\mathcal{R}(\vartheta)\big)^* = \mathcal{L}(\vartheta) \quad \text{bzw.} \quad \big(\mathcal{L}(\vartheta)\big)^* = \mathcal{R}(\vartheta).$$

Insbesondere ist mit $\mathcal{R}(\vartheta)$ auch $\mathcal{L}(\vartheta)$ ein Isomorphismus und umgekehrt, so daß die folgende Definition berechtigt erscheint:

3.3. Definition:
$\vartheta \in$ Hopf-Paar (G,H) heißt *nicht-entartet* oder *regulär,* falls $\mathcal{R}(\vartheta) : G \to H^*$ bijektiv ist.

3.4. Beispiel:
Die Auswertungsabbildung $\vartheta = \langle -, - \rangle : H^* \otimes H \to R$ ist eine nicht-entartete Hopf-Paarung (man kann dies als Definition der Hopf-Algebren-Struktur von H^* auffassen). Die linksassoziierte Abbildung zu ϑ ist die Identität auf H^* während die rechtsassozierte die kanonische Identifikation von H mit seinem Doppeldual darstellt.

3.5. Definition und Lemma:
Seien $\vartheta : G \otimes H \to R$ eine Hopf-Paarung und $\chi : X \to X \otimes G$ und $\upsilon : Y \to Y \otimes H$ Komodul-Algebren, so ist $X \#_\vartheta Y := X \otimes Y$ zusammen mit der Multiplikation

$$(x \# y) \cdot (x' \# y') := \sum_{(x')(y)} \vartheta(x'_{(1)}, y_{(1)})\, (x \cdot x'_{(0)}) \# (y_{(0)} \cdot y') \qquad (x, x' \in X,\ y, y' \in Y)$$

eine R-Algebra mit Einselement $1 \# 1$ (wir schreiben „$\#$“ anstelle von „$\otimes$“, um die *Algebra* $X \#_\vartheta Y$ von der *Algebra* $X \otimes Y$ zu unterscheiden), die vermöge komponentenweiser Diagonalisierung

$$x \# y \mapsto \sum_{(x)(y)} (x_{(0)} \# y_{(0)}) \otimes (x_{(1)} \otimes y_{(1)}) \qquad (x \in X,\ y \in Y)$$

zu einer $G \otimes H$-Komodul-Algebra wird. Wir nennen $X \#_\vartheta Y$ das *Smash-Produkt* von X mit Y bzgl. ϑ.

Beweis: Daß $X \#_\vartheta Y$ mit der angegebenen Multiplikation eine R-Algebra bildet und daß die angegebene Diagonale $X \#_\vartheta Y \to X \#_\vartheta Y \otimes G \otimes H$ eine Algebren-Abbildung ist, läßt sich leicht verifizieren (vgl. [Ch1, Lemma 1.19]). $\diamondsuit$

3.6. Beispiel:
Seien X eine H-Galois-Algebra und $Y = H^*$ die triviale H^*-Galois-Algebra sowie $\vartheta : H \otimes H^* \to R$ die kanonische Paarung (s.o.). Dann ist die aus Satz 1.7 bekannte Abbildung

$$\begin{array}{rcccc} \Phi & : & X \#_\vartheta H^* & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{End}_R(X) \\ & & x \# h^* & \longmapsto & \big(y \mapsto x \cdot (h^* \rightharpoonup y)\big) \end{array}$$

ein Isomorpismus von R-Algebren (vgl. [Ch-Sw, Theorem 9.3] im kommutativen Fall).

Der folgende Satz wurde zuerst von Chase [Ch1, Theorem 1.20] in einem wichtigen Spezialfall bewiesen:

3.7. Satz:
Sei $\vartheta : G \otimes H \to R$ eine Hopf-Paarung. Sind dann $\chi : X \to X \otimes G$ und $\upsilon : Y \to Y \otimes H$ Galois-Algebren, so ist $X \#_\vartheta Y$ eine $G \otimes H$-Galois-Algebra.

Beweis: Bezeichne $Z := X \#_\vartheta Y$ und $\omega : Z \to Z \otimes G \otimes H$ die komponentenweise Diagonale. (Man sollte an dieser Stelle wohl auf eine Tücke der in dieser Arbeit verwendeten Notation hinweisen: Obwohl ω mit der Diagonalen ω_0 von $X \otimes Y$ übereinstimmt, ist $\tilde{\omega} \neq \tilde{\omega}_0$!)
Wir zeigen zunächst die Surjektivität von $\tilde{\omega}$: Da $\tilde{\omega}$ Z-links-linear ist, genügt es hierzu nachzuweisen, daß $R \otimes G \otimes H$ im Bild liegt. Zu gegebenen $g \in G$ und $h \in H$ seien $\sum_i x'_i \otimes x_i := \tilde{\chi}^{-1}(1 \otimes g)$ bzw. $\sum_j y'_j \otimes y_j := \tilde{\upsilon}^{-1}(1 \otimes h)$. Dann ist $\sum_{i,j} (1 \# y'_j) \cdot (x'_i \# 1) \otimes (x_i \# y_j)$ ein Urbild von $1 \# 1 \otimes g \otimes h$.
Da Z und somit $Z \otimes G \otimes H$ endlich erzeugt projektiv sind, können wir uns für den Nachweis der Injektivität von $\tilde{\omega}$ wie in Proposition 2.2 auf den Fall eines Grundkörpers beschränken, in welchem sie aus $\dim(Z \otimes Z) = \dim(Z \otimes G \otimes H)$ folgt. $\diamondsuit$

3.8. Bemerkung:
Durch komponentenweises Diagonalisieren erhält man neben der Diagonalen

$$\omega : X \#_\vartheta Y \to (X \#_\vartheta Y) \otimes (G \otimes H)$$

noch eine weitere Algebren-Abbildung

$$\omega' : X \#_\vartheta Y \to (X \otimes Y) \otimes (G \#_\vartheta H),$$

welche einen $\Delta_{G\otimes H}$-Galois-Morphismus darstellt, d.h. es ist

$$[X \#_\vartheta Y] = [X \otimes Y] \star [G \#_\vartheta H].$$

Der folgende Satz geht auf Chase [Ch2, S.181ff.] zurück (zum Zusammenhang zwischen den dort betrachteten zentralen Erweiterungen von Gruppenschemata vergleiche man [Ch2, S.167ff.]). In der hier verwendeten Sprache der Galois-Algebren findet er sich bei Ulbrich [Ul1].

3.9. Satz:
Sei $\chi : X \to X \otimes H$ eine H-Galois-Algebra. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\kappa : H \otimes H \to R$, so daß für alle $x, y \in X$ die Vertauschungsrelation

$$y \cdot x = \sum_{(x)(y)} \kappa\left(x_{(1)} \otimes y_{(1)}\right) x_{(0)} \cdot y_{(0)} \tag{3.10}$$

erfüllt ist. Dieses κ ist eine Hopf-Paarung. Ferner ist κ genau dann nicht-entartet, wenn X eine Azumaya-Algebra ist.

3.11. Definition:
Dieses $\kappa = \kappa_X$ heißt die *Kommutator-Paarung* der H-Galois-Algebra X.

3.12. Beispiele:
1) Für eine vollgraduierte Algebra $X = \bigoplus X_\pi$ bezüglich einer abelschen Gruppe Π erhält man die Kommutator-Paarung sehr einfach: Zu $\pi, \pi' \in \Pi$ existieren homogene Einheiten $x, x' \in X$ vom Grad π bzw. π' (man beachte, daß $X_\pi \cdot X_{\pi^{-1}} = X_1 = R$ gilt), und man setzt $\kappa(\pi, \pi') := x' \cdot x \cdot x'^{-1} \cdot x^{-1} \in X_1 = R$.

2) Sei X eine zentral-einfache K-Algebra mit einer abelschen Galoisgruppe Π. Nach obigem Satz ist die Kommutator-Paarung regulär, d.h. $K^\Pi \cong K[\Pi]$, so daß sich X auch als eine Π-vollgraduierte Algebra auffassen läßt. Eine Basis homogener Elemente von X erhält man wie folgt: Nach dem Satz von Skolem-Noether operiert Π auf X durch innere Automorphismen: $\pi(x) = u_\pi \cdot x \cdot u_\pi^{-1}$, und es gilt $\deg(u_\pi) = \pi$ oder π^{-1}, je nachdem, ob man zur Identifikation von K^Π mit $K[\Pi]$ $\mathcal{R}(\kappa)$ oder $\mathcal{L}(\kappa)$ verwendet. (Hoechsmann [Hoe] verschafft sich so die Kommutator-Paarung.)

Beweis des Satzes: Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit von κ: Sei $\rho := \mathcal{R}(\kappa)$ die rechtsassoziierte Abbildung zu κ. Die Vertauschungsrelation 3.10 liest sich für ρ als

$$y \cdot x \;=\; \sum_{(x)} x_{(0)} \cdot \big(\rho(x_{(1)}) \rightharpoonup y\big),$$

d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes X^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\tilde{\chi}} & X \otimes H \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Xi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathrm{End}_R(X) & \xleftarrow{\Phi} & X \# H^*, \end{array}$$

mit $F := \mathrm{id}_X \otimes \rho$, $\Phi(x \# h^*)(z) := x \cdot (h^* \rightharpoonup z)$ und $\Xi(x \otimes y)(z) := x \cdot z \cdot y$. Da $\tilde{\chi}$ und Φ bijektiv sind, ist ρ hierdurch bereits eindeutig bestimmt.
Um die Existenz von κ zu erhalten, definieren wir $F := \Phi^{-1} \circ \Xi \circ \tilde{\chi}^{-1}$ und zeigen mittels H-Galois-Abstieg, daß F von der Form $\mathrm{id}_X \otimes \rho$ ist. ($\kappa(h, h') := \rho(h)(h')$ erfüllt dann die Vertauschungsrelation 3.10.)
Wir zeigen zunächst $F = \mathrm{id}_X \otimes \rho$: Offensichtlich ist F ein Homomorphismus von X-Links-Moduln. Somit genügt es $F(R \otimes H) \subset R \otimes H^*$ zu zeigen. Hierzu versehen wir die in obigem Diagramm auftretenden R-Moduln mit den folgenden H^*-Modul-Strukturen:

$$\begin{aligned} g^* \rightharpoonup (x \otimes y) &:= \sum_{(g^*)} (g^*_{(1)} \rightharpoonup x) \otimes (g^*_{(2)} \rightharpoonup y) \\ g^* \rightharpoonup (x \otimes h) &:= (g^* \rightharpoonup x) \otimes h \\ (g^* \rightharpoonup f)(z) &:= \sum_{(g^*)} g^*_{(1)} \rightharpoonup f\big(S(g^*_{(2)}) \rightharpoonup z\big) \\ g^* \rightharpoonup (x \# h^*) &:= (g^* \rightharpoonup x) \otimes h^*, \end{aligned}$$

wobei $g^*, h^* \in H^*$, $h \in H$ und $x, y, z \in X$. Man überzeugt sich leicht, daß $\tilde{\chi}$, Ξ und Φ Morphismen der so definierten H^*-Moduln sind. Insbesondere ist also F H^*-linear, also H-kolinear (bezüglich den entsprechenden H-Komodulstrukturen $x \otimes h \mapsto \sum x_{(0)} \otimes h \otimes x_{(1)}$ bzw. $x \# h^* \mapsto \sum x_{(0)} \# h^* \otimes x_{(1)}$). Somit bildet F H-koinvarinte Elemente auf solche ab (vgl. Def. 2.15), d.h. $F(R \otimes H) \subset R \otimes H^*$.
$\kappa := \mathcal{R}^{-1}(\rho)$ ist eine Hopf-Paarung, denn: ρ ist in **Alg**, da Φ, Ξ und $(\tilde{\chi}^{-1})_{|R \otimes H}$ in **Alg** liegen. Daß $\rho = \mathcal{R}(\kappa)$ auch eine Koalgebren-Abbildung ist, ist gleichbedeutend dazu, daß $\lambda = \mathcal{L}(\kappa) = \rho^*$ in **Alg** liegt. Letzteres erhält man sehr einfach: Mit X ist auch X^{op} eine H-Galois-Algebra und somit liegt ihr ρ' in **Alg**. Die ρ' definierende Vertauschungsrelation in X^{op} wird aber gerade von λ erfüllt. Also folgt $\rho' = \lambda \in$ **Alg**.
Es bleibt zu zeigen, daß X genau dann eine R-Azumaya-Algebra ist, wenn κ regulär ist. Dem obigem Diagramm entnimmt man, daß Ξ genau dann bijektiv ist, wenn ρ (bzw. F) es ist. Da X ein R-Progenerator ist, ist X genau dann Azumaya, wenn Ξ bijektiv ist (vgl. [DM-In, Theorem II.3.4.]). $\diamondsuit$

3.13. Korollar:
Ist $\varphi : G \to H$ eine Hopf-Algebren-Abbildung und $f : Y \to X$ ein φ-Galois-Morphismus, so erhält φ die Kommutator-Paarungen:

$$\kappa_Y(g, g') \;=\; \kappa_X(\varphi(g), \varphi(g')) \qquad\qquad (g, g' \in G),$$

oder gleichbedeutend $\mathcal{R}(\kappa_Y) = \varphi^* \circ \mathcal{R}(\kappa_X) \circ \varphi$.
Insbesondere induziert die Bildung der Kommutator-Paarung einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{K} & : & \mathrm{Gal}\,(H) & \longrightarrow & \text{Hopf-Paar}\,(H, H) \\ & & [X] & \longmapsto & \kappa_X . \end{array}$$

Beweis: Nach 2.5 ist $[Y] = \mathrm{Gal}\,(\varphi)([X])$. Wir haben also zu zeigen: Die Kommutator-Paarung von $\mathrm{Gal}\,(\varphi)(X)$ ist durch $g \otimes g' \mapsto \kappa_X(\varphi(g), \varphi(g'))$ gegeben. Hierzu faktorisieren wir φ als

$$\varphi : G \xrightarrow{\iota} G \otimes H \xrightarrow{\Phi} G \otimes H \xrightarrow{\pi} H,$$

mit $\iota(g) := g \otimes 1$, $\Phi(g \otimes h) := \sum_{(g)} g_{(1)} \otimes g_{(2)} \cdot h$ und $\pi(g \otimes h) := \varepsilon(g)h$ und zeigen die entsprechenden Behauptungen für diese drei Abbildungen: $\mathrm{Gal}\,(\iota)(Z)$ mit $Z \in \mathrm{Gal}\,(G \otimes H)$ läßt sich nach Proposition 2.17 als Unter-Komodul-Algebra von Z realisieren, Φ ist ein Isomorphismus (vgl. Beweis von Satz 2.3) und $\mathrm{Gal}\,(\pi)(X) = X \otimes G$, woraus man unmittelbar die Kommutator-Paarungen entnimmt.
Seien X, $Y \in \mathrm{Gal}\,(H)$ und $X \star Y$ ihr Harrison-Produkt. Per definitionem gibt es also einen Δ-Galois-Morphismus $X \star Y \to X \otimes Y$. Folglich gilt für $h, h' \in H$:

$$\begin{aligned} \kappa_{X \star Y}(h, h') &= \kappa_{X \otimes Y}\big(\Delta(h), \Delta(h')\big) \\ &= \sum \kappa_X(h_{(1)}, h'_{(1)})\; \kappa_Y(h_{(2)}, h'_{(2)}) \\ &= \kappa_X \cdot \kappa_Y . \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

3.14. Folgerung:
Die Kommutator-Paarung $\kappa : H \otimes H \to R$ einer H-Galois-Algebra X ist antisymmetrisch:

$$\kappa(h, h') \;=\; \kappa^{-1}(h', h) \quad \text{oder} \quad \mathcal{R}(\kappa) * \mathcal{L}(\kappa) \;=\; 0 \quad \text{d.h.,} \quad \mathcal{R}(\kappa) \;=\; -\mathcal{R}(\kappa)^* .$$

Beweis: Die Kommutator-Paarung von $[X]^{-1} = \mathrm{Gal}\,(S)[X^{\mathrm{op}}]$ und somit auch von X^{op} (denn $\kappa(Sh, Sh') = \kappa(h, h')$) ist nach obigem Korollar durch κ^{-1} gegeben. Andererseits wird die Vertauschungsrelation 3.10 für X^{op} auch durch $\kappa'(h, h') := \kappa(h', h)$ befriedigt. Aus der Eindeutigkeit der Kommutator-Paarung folgt somit die Behauptung. $\diamondsuit$

3.15. Lemma:
Seien $X \in \mathrm{Gal}\,(G)$, $Y \in \mathrm{Gal}\,(G)$ *und* $\vartheta \in \text{Hopf-Paar}\,(G,H)$. *Dann wird die rechts-assoziierte Abbildung* $\mathcal{R}(\kappa_{X\#_\vartheta Y}) : G\otimes H \to G^* \otimes H^*$ *zur Kommutator-Paarung von* $X \#_\vartheta Y$ *durch die Matrix*

$$\mathcal{R}(\kappa_{X\#_\vartheta Y}) \;=\; \begin{pmatrix} \mathcal{R}(\kappa_X) & \mathcal{R}(\vartheta) \\ -\mathcal{R}(\vartheta)^* & \mathcal{R}(\kappa_Y) \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Beweis: Nach Korollar 3.13 und Bemerkung 3.8 erhält man die Matrix der Kommutator-Paarung von $X \#_\vartheta Y$ als Summe der Matrizen der Kommutator-Paarungen von $X \otimes Y$ und $G \#_\vartheta H$. Wie man leicht nachrechnet, lauten diese

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}(\kappa_X) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}(\kappa_Y) \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}(\vartheta) \\ -\mathcal{R}(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit$$

Sehr häufig werden wir Smash-Produkte bezüglich der kanonischen Hopf-Paarung $\vartheta : H^* \otimes H \to R$, $\vartheta(h^* \otimes h) := \langle\, h^*, h \,\rangle$ betrachten und in erster Linie kommutative H- bzw. H^*-Galois-Algebren als Bausteine verwenden. Für $A \in \mathrm{Gal}_c(H^*)$ und $B \in \mathrm{Gal}_c(H)$ schreiben wir kurz $A \# B$ anstelle von $A \#_\vartheta B$. Galois-Algebren dieses Typs werden im Mittelpunkt des dritten Kapitels dieser Arbeit stehen. Sie sind Azumaya-Algebren, denn ihre Kommutator-Paarung ist die nichtentartete *hyperbolische* Paarung

$$\mathcal{R}(\kappa_{\mathrm{hyp}}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_H \\ -\mathrm{id}_{H^*} & 0 \end{pmatrix}$$

(zur Rechtfertigung dieser Terminologie vgl. man [Sch, Def.7.2.1.vi, S.242] (mit $\lambda = -1$); die Kategorie **Hopf-Alg** bildet eine hermitesche $\mathbf{Z}$-Kategorie im Sinne von loc.cit.).

3.16. Beispiele:
1) Für $H = K[C_n]$ erhält man auf diese Weise die zyklischen Algebren (vgl. [Ch2, Ex.2.13]).
2) Für die selbstduale Hopf-Algebra $H = K[D]/(D^p)$ zu α_p liefert das Smash-Produkt zu $A = K(X)/(X^p - a)$ und $B = K(Y)/(Y^p - b)$ (vgl. Beispiel 2.13.3) die zentral-einfachen Algebren

$$(a,b)_p \;=\; K\,\langle\, X, Y \,\rangle\,/(X^p - a, Y^p - b, YX - XY - 1).$$

3.17. Bemerkung:
In 2.7.4 haben wir gezeigt, daß für kommutative Galois-Algebren $\mathrm{Gal}\,(\nabla)([A]) = [A \otimes A]$ gilt. Wir können nun auch im nicht-kommutativen Fall $\mathrm{Gal}\,(\nabla)([X])$ angeben: Sei $\chi : X \to X \otimes H$ eine Galois-Algebra mit Kommutator-Paarung κ. Dann ist

$$\tilde{\chi} \,:\, X \#_\kappa X \;\longrightarrow\; X \otimes H$$

eine Algebren-Abbildung und somit ein $\tilde{\Delta}$-Galois-Morphismus. Insbesondere induziert die Multiplikations-Abbbildung m von X einen ∇-Galois-Morphismus

$$m \,:\, X \#_\kappa X \;\longrightarrow\; X,$$

d.h. $\mathrm{Gal}\,(\nabla)([X]) = [X \#_\kappa X]$.

Beweis: Es ist $\tilde{\chi}(1 \# 1) = 1 \otimes 1$ und

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}\big((x \# y) \cdot (x' \# y')\big) &= \tilde{\chi}\Big(\sum_{(x')(y)} \kappa(x'_{(1)}, y_{(1)})\, x \cdot x'_{(0)} \# y_{(0)} \cdot y'\Big) \\
&= \sum_{(x')(y)(y')} \kappa(x'_{(1)}, y_{(1)})\, x \cdot x'_{(0)} \cdot y_{(0)} \cdot y'_{(0)} \otimes y_{(2)} \cdot y'_{(1)} \\
&= \sum_{(y)(y')} x \cdot y_{(0)} \cdot x' \cdot y'_{(0)} \otimes y_{(1)} \cdot y'_{(1)} \\
&= \tilde{\chi}\big(x \# y\big) \cdot \tilde{\chi}\big(x' \# y'\big),
\end{aligned}$$

so daß $\tilde{\chi}$ ein $\tilde{\Delta}$-Galois-Morphismus ist. $m \in$ **Alg** folgt aus der Identität $m = (\mathrm{id}_x \otimes \varepsilon) \circ \tilde{\chi}$. Damit ist m ein ∇-Galois-Morphismus. $\diamondsuit$

3.18. Proposition [Tak, Prop. 1.3.1]**:**
Seien G und H in **Hopf-Alg**. *Dann ist*

$$\begin{array}{rlcl}
\# : & \mathrm{Gal}\,(G) \times \mathrm{Gal}\,(H) \times \text{Hopf-Paar}\,(G,H) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}\,(G \otimes H) \\
& (\,[X]\,,\,[Y]\,,\vartheta\,) & \longmapsto & [X \#_{\vartheta} Y]
\end{array}$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

Beweis: Die Umkehrabbildung von $\#$ erhält man durch

$$[Z] \;\mapsto\; (\,\mathrm{Gal}\,(\iota_G)([Z])\,,\,\mathrm{Gal}\,(\iota_H)([Z])\,,\,\vartheta\,)\,,$$

wobei ϑ die Einschränkung der Kommutator-Paarung von Z auf $(G \otimes R) \otimes (R \otimes H)$ bezeichne. Man überzeugt sich leicht, daß dies ein zu $\#$ inverser Homomorphismus ist (vgl. Folgerung 2.12 im kommutativen Fall). $\diamondsuit$

3.19. Beispiele:
Diese Zerlegungseigenschaft gestattet es in vielen Fällen, sich bei der Bestimmung von $\mathrm{Gal}\,(H)$ auf die Berechnung von Harrison-Gruppen $\mathrm{Gal}_c(H_i)$ zurückzuziehen:
1) Ist etwa $H = K[C_n \times C_m]$ der Gruppenring zu einer bizyklischen, abelschen Gruppe, so gilt

$$\mathrm{Gal}\,(K[C_n \times C_m]) \;\cong\; U(K)/U(K)^n \;\times\; U(K)/U(K)^m \;\times\; C_r,$$

falls $r = |\mu_{\mathrm{ggT}(n,m)}(K)|$ die Anzahl der in K liegenden Einheitswurzeln von n und m teilender Ordnung ist, denn:

i) Jede vollgraduierte Algebra X mit zyklischer Graduierungsgruppe ist kommutativ. Ist nämlich x ein homogenes Element, dessen Grad σ die Graduierungsgruppe erzeugt, so folgt aus

$$\kappa_X(\sigma,\sigma) \;=\; x \cdot x \cdot x^{-1} \cdot x^{-1} \;=\; 1$$

bereits, daß die Kommutator-Paarung κ_X trivial ist.

ii) Da bei einer Hopf-Algebren-Abbildung ein gruppenähnliches Element der Ordnung n auf ein solches mit in n aufgehender Ordnung abgebildet wird, ist

$$\text{Hopf-Paar}\,(K[C_n], K[C_m]) \;\cong\; \mathbf{Hopf\text{-}Alg}(K[C_n], K^{C_m}) \;\cong\; C_r.$$

Natürlich läßt sich diese Vorgehensweise auf Gruppen mit mehreren zyklischen Faktoren sowie auf allgemeinere (etwa zusammenhängende) Grundringe übertragen.

2) Ähnlich verhalten sich auch Galois-Algebren zu einer bizyklischen Galois-Gruppe $C_n \times C_m$ über K. Hierzu zeigen wir zunächst, daß jede Galois-Algebra mit zyklischer Galois-Gruppe kommutativ ist (dies wurde zuerst von Hoechsmann [Hoe] bewiesen): Wir können hierbei nach dem obigen Zerlegungssatz o.B.d.A. annehmen, daß die Ordnung der vorliegenden zyklischen Gruppe eine Primzahlpotenz ist, denn auf zwei konstanten Gruppenschemata mit zueinander teilerfremden Ordnungen gibt es offensichtlich nur die triviale Hopf-Paarung. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

i) Die Gruppenordnung ist eine Potenz der Charakteristik von K: Dann gibt es keine nicht-triviale Hopf-Algebren-Abbildung von H in sein Dual, d.h. die Kommutator-Paarung jeder H-Galois-Algebra ist trivial.

ii) Anderenfalls adjungieren wir eine primitive n-te Einheitswurzel ($n =$ Ordnung der betrachteten zyklischen Gruppe), so daß H über dem Erweiterungskörper L isomorph zum Gruppenring $L[C_n]$ ist und wir in der Situation des vorangegangenen Beispiels sind.

Wie in Beispiel 1 gilt

$$\text{Hopf-Paar}\,(K^{C_n}, K^{C_m}) \;\cong\; C_r.$$

3) Als drittes Beispiel in dieser Reihe wollen wir den α_p-Fall betrachten. Sei also $H = K[D]/(D^p)$. Dann ist jede H-Galois-Algebra kommutativ, denn die zugehörige Kommutator-Paarung ist entweder trivial oder regulär ($\text{Hopf-Alg}\,(H, H^*) \cong K$; vgl. Beispiel 2.13.3). Letzteres hätte die Existenz einer zentral-einfachen Algebren der Dimension p zur Folge und scheidet somit aus. Es folgt

$$\text{Gal}\,(K, H \otimes H) \;\cong\; K/K^p \times K/K^p \times K.$$

Aus den vorangegangenen Beispielen könnte man die Vermutung ableiten, daß Galois-Algebren zu direkt-unzerlegbaren (d.h. nicht als Tensorprodukt zweier echter Unter-Hopf-Algebren darstellbarer) Hopf-Algebren stets kommutativ sind. Daß dies nicht der Fall ist, zeigt folgendes Beispiel, das ich einer Anregung von Prof. Chase verdanke:

3.20. Beispiel:

Wir betrachten hierzu die reelle Algebra der Hamiltonschen Quaternionen

$$X := \mathbf{H} = \mathbf{R}\,\langle\, i, j\,\rangle \qquad \text{mit } i^2 = j^2 = -1,\; j \cdot i = -i \cdot j$$

als $V_4 = \langle \sigma, \tau \rangle$ -vollgraduierte Algebra bezüglich $\deg i = \sigma$ und $\deg j = \tau$, d.h. als $\mathbf{R}[V_4]$-Galois-Algebra. Auf $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}X$ operiert $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(\mathbf{C}/\mathbf{R}) = \{1, \gamma\}$ vermöge

$$\hat{\gamma}(z \otimes x) \;:=\; \bar{z} \otimes u^{-1} \cdot x \cdot u, \quad u := i + j.$$

Offensichtlich ist $\hat{\gamma}$ ein γ-semilinearer Algebrenautomorphismus, so daß

$$Y \;:=\; (\,\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}X\,)^{\Gamma}$$

eine Form von $\mathbf{H}$ und somit eine zentral-einfache $\mathbf{R}$-Algebra ist (es gilt $Y \cong \mathbf{H}$). Ebenso ist durch

$$\breve{\gamma}(\sigma) = \tau, \quad \breve{\gamma}(\tau) = \sigma$$

ein γ-semilinearer Hopf-Algebrenautomorphismus von $\mathbf{C}[V_4]$ gegeben, so daß die $\breve{\gamma}$-invarianten Elemente eine $\mathbf{R}$-Hopf-Algebra G bilden. Wegen $\hat{\gamma}(1 \otimes i) = 1 \otimes j$ und $\hat{\gamma}(1 \otimes j) = 1 \otimes i$ ist die Diagonale $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}X \to (\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}X)\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{C}[V_4]$ Γ-linear und schränkt somit zu einer Diagonale $Y \to Y \otimes_{\mathbf{R}} G$ ein, d.h. Y ist eine G-Galois-Algebra.
Es bleibt zu zeigen, daß G direkt unzerlegbar ist. Hierzu bestimmen wir den Hopf-Algebren-Endomorphismenring von G. Dieser besteht aus allen Endomorphismen von $\mathbf{C}[V_4]$, welche mit $\breve{\gamma}$ vertauschen, i.e.

$$\text{Hopf-End}\,(G) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_2^{2\times 2} \right\} \;\cong\; \mathbf{F}_2[Z]/(Z^2)$$

ist ein lokaler Ring.

3.21. Bemerkung zu obigem Beispiel:
Allgemein hat man für eine H-Galois-Algebra X eine exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \to H\text{-Gal-Aut}\,(X) \xrightarrow{\iota} \text{Gal-Aut}\,(X) \xrightarrow{p} \text{Hopf-Aut}\,(H)\,,$$

wobei $p(f, \varphi) = \varphi$ (vgl. 2.4). Ist S eine treuflache Erweiterung des Grundringes R, so beschreiben die ersten Amitsur-Kohomologiemengen (vgl. etwa [Pa, Chap. 4, insb. Theorem 4.5.2])

- $H^1(S/R, H\text{-Gal-Aut}\,(-\otimes_R X))$ die Menge H-Gal-Form (X) aller S-Formen der H-Galois-Algebra X,
- $H^1(S/R, \text{Gal-Aut}\,(-\otimes_R X))$ die Menge Gal-Form (X) aller S-Formen der Galois-Algebra X (bezüglich einer S-Form der Hopf-Algebra H) und
- $H^1(S/R, \text{Hopf-Aut}\,(-\otimes_R H))$ die Menge Hopf-Form (H) aller S-Formen der Hopf-Algebra H.

Obige Sequenz induziert die exakte Sequenz

$$H\text{-Gal-Form}\,(X) \to \text{Gal-Form}\,(X) \to \text{Hopf-Form}\,(H)$$

(zwei verschiedene H-Galois-Formen von X können als Galois-Formen durchaus gleich sein, da die Fixierung der Komodul-Struktur verloren geht!).

Über einem beliebigen Körper K der Charakteristik $\neq 2$ sind die Galois-Automorphismen der Quaternionen-Algebra $X = (-1,-1,K) = K\langle i,j\rangle$ durch die inneren Automorphismen zu den Elementen der von i, j und $i+j$ erzeugten multiplikativen Untergruppe von X gegeben. Letztere ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4 und die Sequenz der Automorphismengruppen lautet

$$1 \to V_4 \to S_4 \to GL(2,\mathbf{F}_2) \cong S_3 \to 1.$$

Obiges Beipiel ist übrigens kein typisches „2-Phänomen“: Der Körper K der Charakteristik $\neq 3$ enthalte eine primitive dritte Einheitswurzel ζ. X sei die Norm-Rest-Algebra

$$X \;=\; K\langle u,v\rangle \qquad \text{mit } u^3 = v^3 = 1,\; v\cdot u = \zeta\cdot u\cdot v$$

mit der $C_3 \times C_3 = \langle\sigma,\tau\rangle$-Graduierung $\deg u = \sigma$, $\deg v = \tau$. Die zugehörige Sequenz der Automorphismengruppen lautet

$$1 \to C_3 \times C_3 \to \text{Gal-Aut}\,(X) \to GL(3,\mathbf{F}_3),$$

wobei Gal-Aut (X) eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 27 ist, deren Bild in $GL(3,\mathbf{F}_3)$ die von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

erzeugte dreielementige Untergruppe ist. Daraus läßt sich über einem geeigneten Körper die Existenz einer zentral-einfachen Galois-Algebra zu einer direkt-unzerlegbaren Form des Gruppenrings zu $C_3 \times C_3$ folgern.

I.4. Galois-Algebren unter monoidalen Funktoren

Bekanntlich [McL, S.174ff.] bildet die Kategorie der Moduln über einem kommutativen Ring R eine symmetrische, abgeschlossene, monoidale Kategorie: Neben dem Tensorprodukt $\otimes = \otimes_R$ und dem Basisobjekt $I = R$ gehören zu den Daten dieser monoidalen Kategorie die folgenden vier kohärenten funktoriellen Morphismen:

$$\begin{array}{rccccccc}
\alpha : & A \otimes (B \otimes C) & \tilde{\to} & (A \otimes B) \otimes C, & a \otimes (b \otimes c) & \mapsto & (a \otimes b) \otimes c \\
\gamma : & A \otimes B & \tilde{\to} & B \otimes A, & a \otimes b & \mapsto & b \otimes a \\
\lambda : & R \otimes A & \tilde{\to} & A, & r \otimes a & \mapsto & r \cdot a \\
\rho : & A \otimes R & \tilde{\to} & A, & a \otimes r & \mapsto & r \cdot a.
\end{array}$$

4.1. Definition:
Seien R und S kommutative Ringe. Ein kovarianter Funktor $\mathcal{F} : R$-**Mod** $\to S$-**Mod** zusammen mit einer natürlichen Transformation $\delta : \mathcal{F}(X) \otimes_S \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X \otimes_R Y)$ und einer S-linearen Abbildung $\zeta : S \to \mathcal{F}(R)$ heiße ein *monoidaler Funktor*, falls

i) $(\mathcal{F}, \delta, \zeta)$ ein schwach-monoidaler Funktor im Sinne von Pareigis [Pa2, S.125f.] (d.h. δ und ζ sind mit α, γ, λ und ρ kompatibel),
ii) ζ ein *Iso*morphismus und
iii) δ ein funktorieller *Iso*morphismus ist.

4.2. Beispiele:

1) Ist $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so ist die Skalarbereichserweiterung $S \otimes_R -$ ein monoidaler Funktor.
2) Die Korestriktion nach Riehm ist ein monoidaler Funktor (vgl. Kap. II).

Offensichtlich führt ein monoidaler Funktor R-Algebren (Monoide in R-**Mod**) in S-Algebren (Monoide in S-**Mod**) und Morphismen von R-Algebren in solche von S-Algebren über. Damit induziert $\mathcal{F}$ einen Funktor

$$\mathcal{F} : R\text{-}\mathbf{Alg} \to S\text{-}\mathbf{Alg}.$$

Gleiches gilt für die Kategorien der Koalgebren, Bialgebren und Hopf-Algebren: Ist etwa H eine R-Hopf-Algebra mit Strukturabbildungen $(\bigtriangledown, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$, so ist $\mathcal{F}(H)$ eine S-Hopf-Algebra, wobei die Strukturmorphismen bis auf Identifikation von $\mathcal{F}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$ mit $\mathcal{F}(H \otimes H)$ und $\mathcal{F}(R)$ mit S durch $(\mathcal{F}(\bigtriangledown), \mathcal{F}(\eta), \mathcal{F}(\Delta), \mathcal{F}(\varepsilon), \mathcal{F}(S))$ gegeben sind (alle Bedingungen an die Strukturabbildungen einer Hopf-Algebra lassen sich in kommutative Diagramme fassen, welche nur die Strukturabbildungen und die Transformationen α, γ, λ und ρ beinhalten). Auch Moduln, Komoduln, Modul-Algebren und Komodul-Algebren werden von $\mathcal{F}$ in geeignetem Sinne erhalten: Ist etwa $\chi : X \to X \otimes_R H$ eine Komodul-Algebra zur R-Hopf-Algebra, so ist $\mathcal{F}(\chi) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X \otimes H) \cong \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(H)$ eine Komodul-Algebra zur S-Hopf-Algebra $\mathcal{F}(H)$.

4.3. Proposition:
Ist $\chi : X \to X \otimes_R H$ eine Galois-Algebra zur endlichen, kokommutativen R-Hopf-Algebra H, so ist $\mathcal{F}(\chi) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X) \otimes_S \mathcal{F}(H)$ eine Galois-Algebra zur endlichen, kokommutativen S-Hopf-Algebra $\mathcal{F}(H)$.

Beweis: Nach [Pa2, Thm.17] ist mit H auch $\mathcal{F}(H)$ endlich. Ebenso ist mit X auch $\mathcal{F}(X)$ ein Progenerator [Pa2, Thm.19]. Ferner führt $\mathcal{F}$ den Isomorphismus $\tilde{\chi} : X \otimes X \to X \otimes H$ in einen Isomorphismus $\mathcal{F}(\tilde{\chi})$ über, so daß sich die Behauptung aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\widetilde{\mathcal{F}(\chi)} & : & \mathcal{F}X \otimes \mathcal{F}X & \stackrel{1\otimes\mathcal{F}(\chi)}{\longrightarrow} & \mathcal{F}X \otimes \mathcal{F}X \otimes \mathcal{F}H & \stackrel{\mathcal{F}(m)\otimes 1}{\longrightarrow} & \mathcal{F}X \otimes \mathcal{F}H \\
 & & \| & & \| & & \| \\
\mathcal{F}(\tilde{\chi}) & : & \mathcal{F}(X \otimes X) & \stackrel{\mathcal{F}(1\otimes\chi)}{\longrightarrow} & \mathcal{F}(X \otimes X \otimes H) & \stackrel{\mathcal{F}(m\otimes 1)}{\longrightarrow} & \mathcal{F}(X \otimes H)
\end{array}$$

ergibt. $\diamondsuit$

4.4. Proposition:
*Für jedes $H \in R$-**Hopf-Alg** induziert $\mathcal{F}$ eine Abbildung*

$$\begin{array}{cccc}
\mathcal{F} & : & \mathrm{Gal}\,(R,H) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}\,(S,\mathcal{F}(H)) \\
 & & [X] & \longmapsto & [\mathcal{F}(X)]\,,
\end{array}$$

*welche zu einer Abbildung $\mathcal{F} : \mathrm{Gal}_c(R,H) \to \mathrm{Gal}_c(S,\mathcal{F}(H))$ einschränkt. Diese Abbildung ist natürlich in folgendem Sinn: Ist $\varphi : G \to H$ ein Morphismus in R-**Hopf-Alg**, so kommutiert das nachstehende Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gal}\,(R,H) & \stackrel{\mathcal{F}}{\longrightarrow} & \mathrm{Gal}\,(S,\mathcal{F}(H)) \\
\big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Gal}\,(R,\varphi)} & & \big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Gal}\,(S,\mathcal{F}(\varphi))} \\
\mathrm{Gal}\,(R,G) & \stackrel{\mathcal{F}}{\longrightarrow} & \mathrm{Gal}\,(S,\mathcal{F}(G))\,.
\end{array}$$

Insbesondere ist $\mathcal{F} : \mathrm{Gal}\,(R,H) \to \mathrm{Gal}\,(S,\mathcal{F}(H))$ ein Homomorphismus von abelschen Gruppen.

Beweis: Sind X und Y zwei Repräsentanten eines Elements von $\mathrm{Gal}\,(R,H)$, gibt es also einen H-Galois-Isomorphismus $f : X \to Y$, so ist $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ ein $\mathcal{F}(H)$-Galois-Isomorphismus, d.h. $[\mathcal{F}(X)] = [\mathcal{F}(Y)]$ in $\mathrm{Gal}\,(S,\mathcal{F}(H))$.
Ist $\varphi : G \to H$ in R-**Hopf-Alg** und $f : X \to Y$ ein φ-Galois-Morphismus (vgl. 2.4), so ist $\mathcal{F}(f)$ ein $\mathcal{F}(\varphi)$-Galois-Morphismus. In Hinblick auf Folgerung 2.5 folgt hieraus die Behauptung $\mathcal{F} \circ \mathrm{Gal}\,(R,\varphi) = \mathrm{Gal}\,(S,\mathcal{F}(\varphi)) \circ \mathcal{F}$, woraus schließlich in Hinblick auf die Definition des Harrison-Produkts (vgl. Proposition 2.8) die Additivität von $\mathcal{F} : \mathrm{Gal}\,(R,H) \to \mathrm{Gal}\,(S,\mathcal{F}(H))$ folgt. $\diamondsuit$

4.5. Proposition:

a) Seien $\vartheta : G \otimes_R H \to R$ *eine Hopf-Paarung und* $\chi : X \to X \otimes_R G$ *sowie* $\upsilon : Y \to Y \otimes_R H$ *Komodul-Algebren. Dann ist auch* $\mathcal{F}(\vartheta) : \mathcal{F}(G) \otimes_S \mathcal{F}(H) \to S$ *eine Hopf-Paarung und* δ *induziert einen Isomorphismus von* $G \otimes H$*-Komodul-Algebren*

$$\mathcal{F}(X) \#_{\mathcal{F}(\vartheta)} \mathcal{F}(Y) \cong \mathcal{F}(X \#_\vartheta Y).$$

b) Sei $\kappa : H \otimes_R H \to R$ *die Kommutator-Paarung zur* H*-Galois-Algebra* X*. Dann ist* $\mathcal{F}(\kappa) : \mathcal{F}(H) \otimes_S \mathcal{F}(H) \to S$ *die Kommutator-Paarung zu* $\mathcal{F}(X)$*.*

Beweis: Man kodiere

i) die Eigenschaft „G mißt H nach R“ bzw. „H mißt G nach R“,

ii) die Definition der Multiplikation auf $X \#_\vartheta Y$ und

iii) die die Kommutator-Paarung definierende Vertauschungsrelation 3.10

in kommutierende Diagramme. $\diamondsuit$

4.6. Weitere Eigenschaften monoidaler Funktoren:

Sei $(\mathcal{F}, \delta, \zeta) : R\text{-}\mathbf{Mod} \to S\text{-}\mathbf{Mod}$ *ein monoidaler Funktor. Dann gelten:*

a) Es gibt eine natürliche Transformation

$$\Phi \ : \ \mathcal{F}(\mathrm{Hom}_R(X,Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \qquad (x, y \in R\text{-}\mathbf{Mod}),$$

welche mit der Auswertungsabbildung π *verträglich ist, d.h. das folgende Diagramm kommutiert* [Pa2, S.126]*:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) \otimes_S \mathcal{F}(\mathrm{Hom}_R(X,Y)) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{F}(X \otimes_R \mathrm{Hom}_R(X,Y)) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle 1\otimes\Phi} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathcal{F}(\pi)} \\ \mathcal{F}(X) \otimes_S \mathrm{Hom}_S(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{F}(Y). \end{array}$$

b) Für endlich-erzeugt projektives P *und beliebiges* Y *ist*

$$\Phi \ : \ \mathcal{F}(\mathrm{Hom}_R(P,Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(Y))$$

ein Isomorphismus [Pa2, Cor.18]*. Insbesondere ist* $\mathcal{F}$ *mit der Dualbildung von endlichen Moduln in funktorieller Weise verträglich, d.h.*

$$\Phi \ : \ \mathcal{F}(P^*) \cong \mathcal{F}(P)^*,$$

wobei man die Auswertungsabbildung $\mathcal{F}(P^*) \otimes_S \mathcal{F}(P) \to S$ *aus* $P^* \otimes_R P \to R$ *durch Anwenden von* $\mathcal{F}$ *erhält.*

4.7. Korollar:

Ist $\vartheta : P \otimes_R Q \to R$ *eine nicht entartete Paarung der endlichen* R*- Moduln* P *und* Q*, so ist auch* $\mathcal{F}(\vartheta) : \mathcal{F}(P) \otimes_S \mathcal{F}(Q) \to S$ *nicht entartet.*

4.8. Korollar:

Ist H *eine endliche* R*-Hopf-Algebra, so ist* $\Phi : \mathcal{F}(H^*) \cong \mathcal{F}(H)^*$ *ein Isomorphismus von* S*-Hopf-Algebren.*

Kapitel II : Korestriktion und Galois-Algebren

II.1. Korestriktion als monoidaler Funktor

Sei L/K eine separable Körpererweiterung vom endlichen Grad n. RIEHM konstruiert in [Ri] einen kovarianten Funktor

$$\mathrm{Cor}_{L/K} \;:\; L\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow K\text{-}\mathbf{Alg}$$

und zeigt unter anderem:

a) Eingeschränkt auf die kommutativen Algebren ist $\mathrm{Cor}_{L/K}$ linksadjungiert zur Skalarbereichserweiterung:

$$K\text{-}\mathbf{Alg}_c(\mathrm{Cor}_{L/K}(A), B) \;\cong\; L\text{-}\mathbf{Alg}_c(A, L \otimes_K B)\,.$$

Damit entspricht $\mathrm{Cor}_{L/K}$ für kommutative Algebren der Weil-Restriktion [De-Ga, I,§ 1,6.6].

b) Die Korestriktion einer zentral einfachen Algebra ist wieder zentral einfach und $\mathrm{Cor}_{L/K}$ induziert einen Homomorphismus der Brauer-Gruppen

$$\mathrm{Cor}_{L/K} \;:\; \mathrm{Br}\,(L) \longrightarrow \mathrm{Br}\,(K)\,,$$

welcher mit der aus der Galois-Kohomologie stammenden Korestriktion

$$C_{L/K} \;:\; H^2(\,\mathrm{Gal}\,(K_s/L), U(K_s)\,) \longrightarrow H^2(\,\mathrm{Gal}\,(K_s/K), U(K_s)\,)$$

übereinstimmt. (U : Einheiten-Funktor, K_s : separabler Abschluß von K).

Wir werden auf Punkt b) im nächsten Kapitel zurückkommen. Zunächst wollen wir uns jedoch mit der Konstruktion und den Eigenschaften von $\mathrm{Cor}_{L/K}$, insbesondere im Zusammenhang mit Galois-Algebren, auseinandersetzen. Hierzu konstruieren wir einen Funktor $\mathrm{Cor}_{L/K}$ auf Vektorraum-Niveau

$$\mathrm{Cor}_{L/K} : L\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow K\text{-}\mathbf{Mod}$$

und weisen nach, daß dies ein monoidaler Funktor im Sinne von Definition I.4.1 ist. Damit erhält $\mathrm{Cor}_{L/K}$ Algebren, Hopf-Algebren, und Galois-Algebren, wobei jedoch aus einer H-Galois-Algebra eine $\mathrm{Cor}_{L/K}(H)$-Galois-Algebra wird. Anschließend werden wir uns der Adjungiertheit von $\mathrm{Cor}_{L/K}$ zur Skalarbereichserweiterung sowohl für kommutative Algebren als auch für kommutative und kokommutative Hopf-Algebren zuwenden. Darauf aufbauend wird dann im nächsten Abschnitt die Norm einer Galois-Algebra, d.h. die „Korestriktion bei festgehaltener Hopf-Algebra", untersucht werden.

Die folgende Darstellung lehnt sich auch in Hinblick auf die verwendete Notation sowohl an die bereits zitierte Arbeit von RIEHM als auch an den entsprechenden Abschnitt des Buches von DRAXL [Dr, I,§8] an.

1.1. Konstruktion von $\mathrm{Cor}_{L/K} : L$-Mod $\longrightarrow K$-Mod:

1) Man wählt eine Galois-Erweiterung N von K, welche L umfaßt. Es bezeichnen

$$\begin{array}{ccll} \Gamma & := & \mathrm{Gal}\,(N/K) & \\ \Delta & := & \mathrm{Gal}\,(N/L) & \\ \Sigma & := & \Gamma/\Delta & \quad (\text{als } \Gamma\text{-Menge}). \end{array}$$

Ferner wählt man eine Transversale der Linksnebenklassen von Γ modulo Δ, d.h. eine Abbildung

$$[\ ] : \Sigma \longrightarrow \Gamma \quad \text{mit } \rho = [\rho] \cdot \Delta \quad (\forall \rho \in \Sigma).$$

Σ ist vermöge $\gamma \cdot \rho := \gamma \cdot [\rho] \cdot \Delta$ eine Γ-Menge, und zu $\gamma \in \Gamma$, $\rho \in \Sigma$ gibt es genau ein $(\gamma, \rho) \in \Delta$ mit

$$\gamma \cdot [\rho] = [\gamma \cdot \rho] \cdot (\gamma, \rho).$$

2) Für einen N-Vektorraum W und ein Element γ in Γ bezeichne ${}^{\gamma}W$ die abelsche Gruppe W zusammen mit der N-Vektorraum-Struktur

$$r \bullet w := \gamma^{-1}(r) \cdot w \qquad (r \in N, w \in W).$$

Damit ist $\mathrm{id} : W \to {}^{\gamma}W$ eine γ-semilineare Abbildung, d.h. $({}^{\gamma}W, \mathrm{id} : W \to {}^{\gamma}W)$ ist ein γ-Konjugat von W im Sinne von [Ri, 4.2].

3) Ist nun V ein L-Vektorraum, so bezeichne $V^{(\Gamma:\Delta)}$ den N-Vektorraum

$$V^{(\Gamma:\Delta)} := \bigotimes_{\rho \in \Sigma} {}^{[\rho]}(N \otimes_L V) \qquad \left(\bigotimes = \bigotimes_N\right).$$

Durch

$$\gamma \cdot \Big(\bigotimes_{\rho} (r_\rho \otimes v_\rho)\Big) = \bigotimes_{\rho} \big((\gamma, \rho')\,(r_{\rho'}) \otimes v_{\rho'}\big) \qquad (\rho' := \gamma^{-1} \cdot \rho) \tag{1.2}$$

ist eine (auf dem über N gebildeten Tensorprodukt wohldefinierte) Operation von Γ auf $V^{(\Gamma:\Delta)}$ gegeben, welche semilinear ist, d.h. ein $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(N/K)$-Abstiegsdatum darstellt. Nach [Kn-Oj, Thm.II.5.1] bilden die Γ-invarianten Elemente von $V^{(\Gamma:\Delta)}$ einen K-Vektorraum und man definiert

$$\mathrm{Cor}_{L/K}(V) := (V^{(\Gamma:\Delta)})^{\Gamma}. \tag{1.3}$$

Es ist also $V^{(\Gamma:\Delta)} \cong N \otimes_K \mathrm{Cor}_{L/K}(V)$ und $\big(V^{(\Gamma:\Delta)}\big)^{\Delta} \cong L \otimes_K \mathrm{Cor}_{L/K}(V)$.

4) Ist $f : V \to W$ ein L-Vektorraum-Homomorphismus, so ist durch

$$\begin{array}{cccc} f^{(\Gamma:\Delta)} : & V^{(\Gamma:\Delta)} & \longrightarrow & W^{(\Gamma:\Delta)} \\ & \bigotimes_{\rho} (v_\rho \otimes v_\rho) & \longmapsto & \bigotimes_{\rho} (r_\rho \otimes f(v_\rho)) \end{array}$$

eine N- und Γ-lineare Abbildung gegeben. Man definiert

$$\mathrm{Cor}_{L/K}(f) : \mathrm{Cor}_{L/K}(V) \longrightarrow \mathrm{Cor}_{L/K}(W)$$

als Einschränkung von $f^{(\Gamma:\Delta)}$ auf die Γ-invarianten Elemente. Damit wird $\mathrm{Cor}_{L/K}$ zu einem kovarianten Funktor.

1.4. Bemerkung:

1) Man kann zeigen, daß $\mathrm{Cor}_{L/K}$ bis auf funktorielle Isomorphie weder von der Wahl der Transversale $[\,] : \Sigma \to \Gamma$ noch von der Galois-Erweiterung N/K abhängt. Man vergleiche hierzu [Dr, I.8 L.3 und L.5].

2) Etwas durchsichtiger wird obige Konstruktion im Fall einer Galois-Erweiterung L/K, wenn man $N = L$ wählt: $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(L/K)$ operiert dann auf

$$V^{(\Gamma:1)} = \bigotimes_{\rho\in\Gamma} {}^{\rho}V \quad \text{durch} \quad \gamma\cdot(\bigotimes_{\rho} v_\rho) = \bigotimes_{\rho} v_{\gamma^{-1}\cdot\rho}.$$

1.5. Proposition:

$\mathrm{Cor}_{L/K} : L\text{-}\mathbf{Mod} \to K\text{-}\mathbf{Mod}$ *ist ein monoidaler Funktor.*

Beweis: Für L-Vektorräume V und W ist der N-lineare Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} V^{(\Gamma:\Delta)} \otimes_N W^{(\Gamma:\Delta)} & \longrightarrow & (V\otimes_L W)^{(\Gamma:\Delta)} \\ \big(\bigotimes_\rho r_\rho \otimes v_\rho\big) \otimes \big(\bigotimes_\rho s_\rho \otimes w_\rho\big) & \longmapsto & \bigotimes_\rho (r_\rho\, s_\rho)\otimes(v_\rho\otimes w_\rho) \end{array}$$

mit der Operation von Γ (vgl. 1.2; auf der linken Seite operiert Γ diagonal) verträglich und induziert somit einen K-linearen Isomorphismus

$$\delta = \delta_{V,W} \;:\; \mathrm{Cor}_{L/K}V \otimes_K \mathrm{Cor}_{L/K}W \;\longrightarrow\; \mathrm{Cor}_{L/K}(V\otimes_L W).$$

Ebenso induziert

$$N \ni r \longmapsto r\cdot \bigotimes_\rho (1\otimes 1) \in L^{(\Gamma:\Delta)}$$

einen K-linearen Isomorphismus

$$\zeta \;:\; K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cor}_{L/K}(L).$$

Man überzeugt sich leicht, daß δ tatsächlich bifunktoriell ist und daß δ und ζ mit den Morphismen α, γ, λ und ρ (vgl. I.4) kompatibel sind (man kann beides nach Skalarbereichserweiterung zu N testen!). $\diamondsuit$

Wie in Abschnitt I.4. ausgeführt, erhält $\mathrm{Cor}_{L/K}$ als monoidaler Funktor unter anderem Algebren und Hopf-Algebren und induziert einen in der Hopf-Algebra H natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Cor}_{L/K} \;:\; \mathrm{Gal}\,(L,H) \;\longrightarrow\; \mathrm{Gal}\,(K,\mathrm{Cor}_{L/K}(H)).$$

Allein aus der vorangegangenen Proposition läßt sich übrigens schon folgern, daß $\mathrm{Cor}_{L/K}$ Azumaya-Algebren erhält und einen Homomorphismus

$$\mathrm{Cor}_{L/K} \;:\; \mathrm{Br}\,(L) \;\longrightarrow\; \mathrm{Br}\,(K)$$

induziert (vgl. [Pa2, Thm 20]; man beachte, daß die dortige Voraussetzung „F erhält Differenzkokerne“ nur für die die Brauer-Gruppe B_2 betreffenden Aussagen erforderlich ist. Im Fall von Modul-Kategorien ist dies irrelevant, da die beiden Brauer-Gruppen übereinstimmen).

Wir wollen nun auf die Adjungiertheit von $\mathrm{Cor}_{L/K}$ und $L \otimes_K -$ im Falle kommutativer Algebren eingehen. Hierzu geben wir zunächst die zugehörigen Adjunktionsmorphismen an:

(1.6) Für eine kommutative L-Algebra A induziert

$$A \ni a \longmapsto (1 \otimes a) \bigotimes \Big(\bigotimes_{\rho \neq \Delta} (1 \otimes 1) \Big) \in A^{(\Gamma:\Delta)}$$

eine L-Algebren-Abbildung

$$\iota = \iota_A \ : \ A \longrightarrow L \otimes_K \mathrm{Cor}_{L/K}(A) \cong (A^{(\Gamma:\Delta)})^{\Delta} \, .$$

(1.7) Für eine kommutative K-Algebra B induziert die $n = [L:K]$-fache Multiplikation

$$\begin{array}{ccc} (L \otimes_K B)^{(\Gamma:\Delta)} & \longrightarrow & N \otimes_K B \\ \bigotimes\limits_{\rho} (r_\rho \otimes b_\rho) & \longmapsto & \prod\limits_{\rho} r_\rho \cdot b_\rho \end{array}$$

eine K-Algebren-Abbildung

$$\mu = \mu_B \ : \ \mathrm{Cor}_{L/K}(L \otimes_K B) \longrightarrow B \, .$$

(1.8) Sowohl ι als auch μ sind funktoriell, und man erhält die Adjungiertheitsbeziehung

$$\begin{array}{ccc} K\text{-}\mathbf{Alg}_c(\mathrm{Cor}_{L/K} A, B) & \cong & L\text{-}\mathbf{Alg}_c(A, L \otimes_K B) \\ f & \longmapsto & (L \otimes_K f) \circ \iota_A \\ \mu_B \circ \mathrm{Cor}_{L/K}(g) & \longleftarrow\!\!\shortmid & g \, . \end{array}$$

1.9. Bemerkung und Beispiel:

1) Aus der Linksadjungiertheit von $\mathrm{Cor}_{L/K}$ zu $L \otimes_K -$ erhält man eine alternative Beschreibung von $\mathrm{Cor}_{L/K}$ für kommutative, separable Algebren: Beschreibt man wie in Beispiel I.9.7 die Kategorie der endlich-dimensionalen, kommutativen, separablen K- bzw. L-Algebren durch die zu ihnen antiäquivalenten Kategorien der stetigen, endlichen $\Gamma := \mathrm{Gal}\,(K_s/K)$- bzw. $\Delta := \mathrm{Gal}\,(K_s/L)$-Mengen, so entspricht der Skalarbereichserweiterung gerade der Vergißfunktor, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K\text{-}\mathbf{Alg}_{c,sep} & \xrightarrow{X_-} & \Gamma\text{-}\mathbf{Me} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle L\otimes_K -} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathcal{V}} \\ L\text{-}\mathbf{Alg}_{c,sep} & \xrightarrow{X_-} & \Delta\text{-}\mathbf{Me} \end{array}$$

kommutiert. Folglich entspricht dem zur Skalarbereichserweiterung linksadjungierten Funktor $\mathrm{Cor}_{L/K}$ der zum Vergißfunktor $\mathcal{V}$ rechtsadjungierte Funktor

$$\mathrm{Abb}_{\Delta}(\Gamma, -) \ : \ \Delta\text{-}\mathbf{Me} \longrightarrow \Gamma\text{-}\mathbf{Me} \, ,$$

welcher einer Δ-Menge X die Menge aller Δ-äquivarianten Abbildungen $\Gamma \to X$ zuordnet, auf der Γ durch $(\gamma \cdot f)(\gamma') := f(\gamma' \cdot \gamma)$ stetig operiert. Die Adjunktionsmorphismen hierzu lauten zu $X \in \mathbf{\Delta\text{-}Me}$ bzw. $Y \in \Gamma\text{-}\mathbf{Me}$

$$\begin{array}{rcccc} \iota_X & : & \mathcal{V}(\mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, X)) & \longrightarrow & X, \\ & & f & \longmapsto & f(e_\Gamma) \\ \mu_Y & : & Y & \longrightarrow & \mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, \mathcal{V}(Y)) \\ & & y & \longmapsto & (\gamma \mapsto \gamma \cdot y)\,. \end{array}$$

2) Draxl [Dr, I.§8.L.9] behauptete, daß die Korestriktion von $L \otimes_K X$, X eine K-Algebra, isomorph zum n-fachen Tensorprodukt von X sei. Dies wurde von Tignol [Ti, Ex.2.4] anhand eines Gegenbeispiels widerlegt, das wir mit Hilfe der vorangegangenen Überlegungen leicht nachvollziehen können:
Seien $K := \mathbf{R}$ und $L := \mathbf{C}$, also $\Gamma = \{1, \gamma\}$ und $\Delta = 1$. Dann entsprechen der $\mathbf{R}$-Algebra $A := \mathbf{C}$ die Γ-Menge Γ, der $\mathbf{C}$-Algebra $\mathbf{C} \otimes_\mathbf{R} A$ die Δ-Menge $\mathcal{V}(\Gamma)$ und der $\mathbf{R}$-Algebra $\mathrm{Cor}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(\mathbf{C} \otimes_\mathbf{R} A)$ die vierelementige Γ-Menge $\mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, \mathcal{V}(\Gamma))$. Letztere besteht aus drei Γ-Bahnen, woraus bereits

$$\mathrm{Cor}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(\mathbf{C} \otimes_\mathbf{R} A) \;\cong\; \mathbf{C} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

folgt.

Dual zur Situation für kommutative Algebren ist $\mathrm{Cor}_{L/K}$ für kokommutative Koalgebren rechtsadjungiert zur Skalarbereichserweiterung. Die Adjunktionsmorphismen lauten:

(1.10) Für eine kokommutative L-Koalgebra C induziert

$$\begin{array}{ccc} C^{(\Gamma:\Delta)} & \longrightarrow & N \otimes_L C \\ (r \otimes c) \bigotimes \Big(\bigotimes\limits_{\rho \neq \Delta} (r_\rho \otimes c_\rho) \Big) & \longmapsto & (r \otimes c) \cdot \prod\limits_{\rho \neq \Delta} \big(r_\rho \otimes \varepsilon(c_\rho) \big) \end{array}$$

eine L-Koalgebren-Abbildung

$$\pi = \pi_C \;:\; L \otimes_K \mathrm{Cor}_{L/K}(C) \;\cong\; (C^{(\Gamma:\Delta)})^\Delta \;\longrightarrow\; C\,.$$

(1.11) Für eine kokommutative K-Koalgebra D induziert die $n = [L : K]$-fache Diagonale

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_K D & \longrightarrow & (L \otimes_K D)^{(\Gamma:\Delta)} \\ r \otimes d & \longmapsto & r \cdot \sum\limits_{(d)} \bigotimes\limits_{\rho} (1 \otimes d_{(\rho)}) \end{array}$$

(da D kokommutativ ist, hängt $\sum_{(d)} \bigotimes_\rho d_{(\rho)} := \sum_{(d)} d_{(1)} \otimes \ldots \otimes d_{(n)}$ nicht von der Wahl einer Anordnung der Elemente $\rho \in \Sigma$ ab) eine K-Koalgebren-Abbildung

$$\delta = \delta_D \;:\; D \longrightarrow \mathrm{Cor}_{L/K}(L \otimes_K D)\,.$$

(1.12) Sowohl π als auch δ sind funktoriell, und man erhält die Adjungiertheitsbeziehung

$$\begin{array}{ccc} K\text{-}\mathbf{Koalg}_{coc}(D, \mathrm{Cor}_{L/K}C) & \cong & L\text{-}\mathbf{Koalg}_{coc}(L \otimes_K D, C) \\ f & \longmapsto & \pi_C \circ (L \otimes_K f) \\ \mathrm{Cor}_{L/K}(g) \circ \delta_D & \longleftarrow & g\,. \end{array}$$

Zum Zusammenspiel von $\mathrm{Cor}_{L/K}$ und $L \otimes_K -$ für kommutative und kokommutative Hopf-Algebren stellen wir folgendes fest:

(1.13) Für eine kommutative und kokommutative L-Hopf-Algebra G sind die Adjunktionsmorphismen

$$\begin{array}{cccccc} \iota = \iota_G & : & G & \longrightarrow & L \otimes_K \mathrm{Cor}_{L/K}(G) \\ \pi = \pi_G & : & L \otimes_K \mathrm{Cor}_{L/K}(G) & \longrightarrow & G \end{array}$$

Hopf-Algebren-Abbildungen mit $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_G$.

(1.14) Für eine kommutative und kokommutative K-Hopf-Algebra H sind die Adjunktionsmorphismen

$$\begin{array}{cccccc} \mu = \mu_H & : & \mathrm{Cor}_{L/K}(L \otimes_K H) & \longrightarrow & H \\ \delta = \delta_H & : & H & \longrightarrow & \mathrm{Cor}_{L/K}(L \otimes_K H) \end{array}$$

Hopf-Algebren-Abbildungen mit $\mu \circ \delta = [n]$ (vgl. 2.10.1).

Folglich ist $\mathrm{Cor}_{L/K} : L\text{-}\mathbf{Hopf\text{-}Alg} \to K\text{-}\mathbf{Hopf\text{-}Alg}$ sowohl rechts- als auch linksadjungiert zur Skalarbereichserweiterung.

1.15. Bemerkung:

1) Für eine endliche L-Hopf-Algebra G ist $\iota_{G^*} = (\pi_G)^*$ und $\pi_{G^*} = (\iota_G)^*$. Ebenso gilt für eine endliche K-Hopf-Algebra H $\delta_{H^*} = (\mu_H)^*$ und $\mu_{H^*} = (\delta_H)^*$.

2) In Fortsetzung von Bemerkung 1.9.1 wollen wir die Morphismen π und δ im Fall separabler Hopf-Algebren auf den zugehörigen Γ- bzw. Δ-Moduln beschreiben:

a) Für einen stetigen Δ-Modul X ist

$$\begin{array}{cccc} \pi_X & : & X & \longrightarrow & \mathcal{V}(\mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, X) \\ & & x & \longmapsto & \gamma \mapsto \begin{cases} \gamma \cdot x & \text{für } \gamma \in \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

ein Morphismus von Δ-Moduln.

b) Für einen stetigen Γ-Modul Y ist

$$\begin{array}{cccc} \delta_Y & : & \mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, \mathcal{V}Y) & \longrightarrow & Y \\ & & f & \longmapsto & \sum\limits_{\rho \in \Gamma/\Delta} [\rho] \cdot f([\rho]^{-1}) \end{array}$$

ein Morphismus von Γ-Moduln, wobei δ_Y nicht von der Wahl einer Transversale $[\ ] : \Gamma/\Delta \to \Gamma$ abhängig ist.

II.2. Die Norm einer Galois-Algebra

Wir behalten die Situation und die Bezeichnungen des vorangegangenen Abschnittes bei. Insbesondere sei also L eine endliche, separable Körpererweiterung von K vom Grad n. Wie wir bereits festgestellt haben, induziert die Korestriktion als monoidaler Funktor einen in der L-Hopf-Algebra H natürlichen Homomorphismus abelscher Gruppen

$$\mathrm{Cor}_{L/K} \;:\; \mathrm{Gal}\,(L,H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}\,(K, \mathrm{Cor}_{L/K}(H)).$$

Hierbei wird beispielsweise einer L^{Π}-Galois-Algebra X zur abelschen Gruppe Π eine K-Algebra $\mathrm{Cor}_{L/K}(X)$ mit einer Galois-Struktur zu einer relativ großen und „unhandlichen“ Hopf-Algebra $\mathrm{Cor}_{L/K}(L^{\Pi})$ zugeordnet (es ist $\dim_K \mathrm{Cor}_{L/K}(L^{\Pi}) = |\Pi|^n$ und man kann zeigen, daß $\mathrm{Cor}_{L/K}(L^{\Pi})$ bis auf die Trivialfälle $L = K$ oder $\Pi = 1$ nicht von der Form $K^{\Pi'}$ ist). Ist die Hopf-Algebra wie in diesem Fall bereits über K definiert (i.e. von der Form $L \otimes_K H$), so kann man einer $L \otimes_K H$-Galois-Algebra eine H-Galois-Algebra zuordnen:

2.1. Definition:
Sei H eine K-Hopf-Algebra und X eine $L\otimes_K H$-Galois-Algebra über L. Bezeichne δ_H den in 1.11 definierten Adjunktionsmorphismus $\delta_H : H \to \mathrm{Cor}_{L/K}(L \otimes_K H)$. Dann heißt

$$H\text{-}\mathrm{N}_{L/K}([X]) \;=\; \mathrm{N}_{L/K}([X]) \;:=\; \mathrm{Gal}\,(K, \delta_H) \circ \mathrm{Cor}_{L/K}\;([X]) \;\in\; \mathrm{Gal}\,(K,H)$$

die H-Norm von $[X] \in \mathrm{Gal}\,(L, L \otimes_K H)$.

2.2. Proposition:

a) *Für jede K-Hopf-Algebra H ist*

$$H\text{-}\mathrm{N}_{L/K} \;:\; \mathrm{Gal}\,(L, L \otimes_K H) \;\longrightarrow\; \mathrm{Gal}\,(K,H)$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen.

b) *Ist $\varphi : G \to H$ eine Abbildung von K-Hopf-Algebren, so kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}\,(L, L\otimes_K H) & \xrightarrow{H\text{-}\mathrm{N}_{L/K}} & \mathrm{Gal}\,(K,H) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Gal}\,(L, L\otimes_K \varphi)} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Gal}\,(K,\varphi)} \\ \mathrm{Gal}\,(L, L\otimes_K G) & \xrightarrow{G\text{-}\mathrm{N}_{L/K}} & \mathrm{Gal}\,(K,G)\,, \end{array}$$

d.h. $\mathrm{N}_{L/K}$ *stellt eine natürliche Transformation der gruppenwertigen Funktoren* $\mathrm{Gal}\,(L, L\otimes_K -)$ *und* $\mathrm{Gal}\,(K,-)$ *auf der Kategorie* K-**Hopf-Alg** *dar.*

Beweis: $\mathrm{N}_{L/K}$ ist als Komposition der Homomorphismen $\mathrm{Gal}\,(k, \delta_H)$ und $\mathrm{Cor}_{L/K}$ ein Gruppenhomomorphismus. Der zweite Teil der Behauptung folgt aus der Identität $\delta_H \circ \varphi = \mathrm{Cor}_{L/K}(\mathrm{id}_L \otimes_K \varphi) \circ \delta_G$ (δ ist funktoriell) und Proposition I.4.4. $\diamondsuit$

2.3. Bemerkung:

1) Selbstverständlich führt $\mathrm{N}_{L/K}$ kommutative Galois-Algebren in ebensolche über. Dies gilt ja sowohl für $\mathrm{Cor}_{L/K}$ als auch für den Funktor Gal ganz allgemein.

2) $\mathrm{N}_{L/K}(X)$ läßt sich wegen der Injektivität von δ_H als die Unter-Algebra der $\delta_H(H)$-koinvarianten Elemente von $\mathrm{Cor}_{L/K}(X)$ (vgl. Proposition I.2.17) realisieren. Nach Skalarbereichserweiterung zu N erhält man

$$\begin{aligned} N \otimes_K \mathrm{N}_{L/K}(X) &\cong \mathrm{Gal}\,(N, \Delta_n)(X^{(\Gamma:\Delta)}) \\ &\cong \mathop{\star}_{\rho\in\Sigma} {}^{\rho}(N \otimes_L X)\,. \end{aligned}$$

Für kommutative Galois-Algebren gelten etwas weitergehende Aussagen:

2.4. Proposition:

Für eine K-Hopf-Algebra H ist die Komposition

$$\mathrm{Gal}_c(K,H) \xrightarrow{L\otimes_K -} \mathrm{Gal}_c(L, L\otimes_K H) \xrightarrow{\mathrm{N}_{L/K}} \mathrm{Gal}_c(K,H)$$

gleich der Multiplikation mit $n = [L:K]$.

Beweis: Sei $\alpha : A \to A\otimes_K H$ eine kommutative H-Galois-Algebra. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cor}_{L/K}(L\otimes_K A) & \xrightarrow{\mathrm{Cor}_{L/K}(\alpha)} & \mathrm{Cor}_{L/K}(L\otimes_K A)\otimes_K \mathrm{Cor}_{L/K}(L\otimes_K H) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_A} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A\otimes\mu_H} \\ A & \xrightarrow{\alpha} & A\otimes_K H \end{array}$$

kommutativ (der Adjunktionsmorphismus μ_- ist funktoriell; vgl. 1.7), d.h. μ_A ist ein μ_H-Galois-Morphismus, i.e.

$$\mathrm{Cor}_{L/K}(L\otimes_K [A]) = \mathrm{Gal}\,(K,\mu_H)([A]).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_{L/K}(L\otimes_K [A]) &= \mathrm{Gal}\,(K,\delta_H)\circ \mathrm{Gal}\,(K,\mu_H)\;([A]) \\ &= \mathrm{Gal}\,(K,\mu_H\circ\delta_H)\;([A]) \\ &= n\cdot([A])\,, \end{aligned}$$

denn nach 1.14 ist ja $\mu_H\circ\delta_H = [n]_H$. $\diamondsuit$

2.5. Beispiele:

Der Einfachheit halber nehmen wir in den folgenden Beispielen stets an, daß L selbst eine Galoiserweiterung von K mit Galois-Gruppe Γ ist, und wählen zur Konstruktion von $\mathrm{Cor}_{L/K}$ wie in 1.4.2 $N = L$.

1) Sei $H = K[C_k]$ der Gruppenring zur zyklischen Gruppe der Ordnung k mit Erzeuger σ. Sei ferner $a \in \mathcal{U}(L)$ eine Einheit und $A = L[X]/(X^k - a)$ die zugehörige $L \otimes_K H$-Galois-Algebra (vgl. Beispiel I.2.13.1). Für $\gamma \in \Gamma$ ist ${}^{\gamma}(L \otimes_K H)$ kanonisch isomorph zu $L \otimes_K H$. Für das Element $x = \bar{X}$ von ${}^{\gamma}A$ gilt $x^k = a \bullet 1 = \gamma^{-1}(a) \cdot 1$, so daß die Galois-Algebra ${}^{\gamma}A$ zur Einheit $\gamma(a)$ gehört. Es ist also

$$A^{(\Gamma:1)} \;\cong\; L\,[\,X_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma\,] \,/\, (\,X_\gamma^k - \gamma^{-1}(a) \,|\, \gamma \in \Gamma\,)\,,$$

und man folgert leicht

$$H\text{-}\mathrm{N}_{L/K}(A) \;\cong\; K[Y]/\big(Y^k - \prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}(a)\big)\,,$$

d.h. die H-Norm der Galois-Algebra zu $a \in \mathcal{U}(L)$ ist die H-Galois-Algebra zur Norm von a in $\mathcal{U}(K)$.

2) Sei $H = K^{C_r}$ das Dual zum Gruppenring, wobei r relativ prim zur Charakteristik von K sei. Wiederum sei σ ein fest gewähltes Erzeugendes der zyklischen Gruppe C_r. Der Erweiterungskörper L enthalte eine primitive r-te Einheitswurzel ζ. Bekanntlich gibt es dann einen Gruppenhomomorphismus

$$t \;:\; \Gamma = \mathrm{Gal}\,(L/K) \;\to\; \mathcal{U}\big(\mathbf{Z}/r\mathbf{Z}\big) \quad \text{mit} \quad \gamma(\zeta) = \zeta^{t(\gamma)}.$$

Wie wir in Beispiel I.2.13.2 gesehen haben, lassen sich $L \otimes_K H$-Galois-Algebren sehr einfach beschreiben: Es ist $L^{C_r} \cong L[C_r]$, so daß jede $L \otimes_K H$-Galois-Algebra von der Form $A = L[X]/(X^k - a)$ mit einer Einheit $a \in \mathcal{U}(L)$ ist. Da obiger Isomorphismus des Gruppenrings mit seinem Dual von der Wahl von ζ abhängig ist, wollen wir die Klasse dieser $L \otimes_K H$-Galois-Algebra A kurz mit $[a]_\zeta$ bezeichnen. Ist s relativ prim zu r und somit ζ^s eine andere primitive r-te Einheitswurzel, so gilt $[a]_{\zeta^s} = [a^s]_\zeta$. Ist nun $\gamma \in \Gamma$, so gilt also für das γ-Konjugat von $[a]_\zeta$

$${}^{\gamma}[a]_\zeta \;=\; [\gamma^{-1}(a)]_{\gamma(\zeta)} \;=\; [\gamma^{-1}(a)]_{\zeta^{t(\gamma)}} \;=\; [\gamma^{-1}(a)^{t(\gamma)}]_\zeta\;,$$

und es folgt

$$L \otimes_K (\mathrm{N}_{L/K}([a]_\zeta) \;=\; \Big[\prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}(a)^{t(\gamma)}\Big]_\zeta\,,$$

d.h. die Restriktion der Norm von $[a]_\zeta$ ist durch die Stickelberger-Norm

$$\begin{array}{rcccc} T_{L/K,r} & : & \mathcal{U}(L)/\mathcal{U}(L)^r & \longrightarrow & \mathcal{U}(L)/\mathcal{U}(L)^r \\ & & a & \longmapsto & \prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}(a)^{t(\gamma)} \end{array}$$

gegeben [Chi]. Falls n prim zu r ist, läßt sich aus der Tatsache, daß die Harrison-Gruppe zu H von r annuliert wird, und der vorangegengenen Proposition folgern, daß die K^{C_r}-Norm surjektiv ist und

$$\mathrm{Gal}_c(K, K^{C_r}) \;\cong\; \mathrm{Im}\,(T_{L/K,r}) \;\cong\; \big(\mathcal{U}\,(L)/\mathcal{U}\,(L)^r\big) \;/\; \mathrm{Ker}\,(T_{L/K,r})$$

gilt (vgl. [Gr, Abschnitt I.5]).

3) Ähnlich wie in 1) erkennt man, daß im Fall von α_p-Erweiterungen die Norm durch die Spurabbildung

$$\mathrm{Tr}_{L/K} \;:\; L/L^p \;\to\; K/K^p$$

gegeben ist (vgl. Beispiel I.2.13.3).

Bezeichnen wieder $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(K_s/K)$ bzw. $\Delta = \mathrm{Gal}\,(K_s/L)$ die absoluten Galois-Gruppen von K bzw. L. Wie in Abschnitt I.2 erläutert, läßt sich die Harrison-Gruppe der kommutativen Galois-Algebren zu einer separablen K-Hopf-Algebra H als erste Galois-Kohomologie-Gruppe mit Koeffizienten im Γ-Modul X_H beschreiben. Es gilt nun:

2.6. Satz:

Sei H eine separable K-Hopf-Algebra und X_H der zugehörige Γ-Modul. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\Delta, \mathcal{V}(X_H)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Gal}_c(L, L \otimes_K H) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle c_{L/K}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_{L/K}} \\
H^1(\Gamma, X_H) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Gal}_c(K, H)\,,
\end{array}$$

wobei $c_{L/K}$ die Galois-kohomologische Korestriktionabbildung bezeichnet.

Beweis: Sei $\hat{H} = X_H$. Nach Beispiel I.2.13.4 gehört zum 1-Kozykel $z : \Delta \to \mathcal{V}(\hat{H})$ die Δ-Menge

$$\hat{A} \;=\; \hat{H} \quad \text{mit} \quad \delta * h \;=\; \delta \cdot h + z(\delta) \quad (\delta \in \Delta),$$

auf der $\mathcal{V}(\hat{H})$ durch Rechtstranslation operiert.

Nach [Ri, Thm.3, Gleichung (8) zusammen mit Gleichung (6)] ist durch

$$z'(\gamma) \;:=\; \sum_{\rho \in \Gamma/\Delta} [\rho] \cdot z(\,(\gamma, \gamma^{-1}\rho)\,)$$

(Notation wie in 1.1; siehe auch [Ri]) ein 1-Kozykel gegeben, welcher in der Kohomologieklasse von $c_{L/K}(z)$ liegt.

Zu diesem 1-Kozykel $z' : \Gamma \to \hat{H}$ gehört die Γ-Menge

$$\hat{A}' \;=\; \hat{H} \quad \text{mit} \quad \gamma *' h \;=\; \gamma \cdot h + z'(\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma),$$

auf der $\hat{H}$ wiederum durch Rechtstranslation operiert.
Bezeichne $\varphi : \mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, \mathcal{V}(\hat{H})) \to \hat{H}$ die Γ-lineare Abbildung X_{δ_H}. Nach Bemerkung 1.15.2.b gilt:

$$\varphi(f) \;=\; \sum_\rho [\rho] \cdot f([\rho]^{-1}) \qquad \big(f \in \mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, \hat{H})\big).$$

Zu zeigen ist also die Existenz einer Γ-linearen Abbildung $\psi : \mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, \hat{A}) \to \hat{A}'$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, \mathcal{V}(\hat{H})) \times \mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, \hat{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, \hat{A}) \\
\Big\downarrow \scriptstyle{\varphi \times \psi} & & \Big\downarrow \scriptstyle{\psi} \\
\hat{H} \times \hat{A}' & \longrightarrow & \hat{A}'
\end{array}$$

kommutativ macht. Wir setzen

$$\psi(g) \;:=\; \sum_\rho [\rho] \cdot g([\rho]^{-1}) \qquad \big(g \in \mathrm{Abb}_\Delta(\Gamma, \hat{A})\big).$$

(Im Gegensatz zu φ ist ψ von der Wahl einer Transversale $[\ \ ] : \Gamma/\Delta \to \Gamma$ abhängig.)
Mit dieser Wahl von ψ ist die Kommutativität des obigen Diagrammes gewährleistet, so daß nur noch die Γ-Linearität von ψ zu zeigen ist:

$$\begin{aligned}
\psi(\gamma \cdot g) \;&=\; \sum_\rho [\rho] \cdot g([\rho]^{-1} \cdot \gamma) \\
\big(\rho' := \gamma^{-1} \cdot \rho \Rightarrow\;& \gamma \cdot [\rho'] = [\rho] \cdot (\gamma, \rho')\,\big) \\
&=\; \sum_\rho [\rho] \cdot g(\,(\gamma, \rho') \cdot [\rho']^{-1}) \\
&=\; \sum_\rho [\rho] \cdot \big(\,(\gamma, \rho') \cdot g([\rho']^{-1}) + z(\,(\gamma, \rho')\,)\big) \\
&=\; \sum_\rho \gamma \cdot [\rho'] \cdot g([\rho']^{-1}) \;+\; \sum_\rho [\rho] \cdot z(\,(\gamma, \gamma^{-1}\rho)\,) \\
&=\; \sum_\rho \gamma \cdot [\rho'] \cdot g([\rho']^{-1}) \;+\; z'(\gamma) \\
&=\; \gamma *' \sum_\rho [\rho'] \cdot g([\rho']^{-1}) \\
&=\; \gamma *' \psi(g)\,. \qquad\qquad \Diamond
\end{aligned}$$

Kapitel III : Brauer-Gruppe und Galois-Algebren

III.1. Eine Brauer-Gruppe von Galois-Algebren

1.1. Definition:

1) Für eine R-Hopf-Algebra H bezeichne H^{hyp} die Hopf-Algebra $H^* \otimes H$ zusammen mit der hyperbolischen Hopf-Paarung

$$\kappa^{\text{hyp}} \quad : \quad H^{\text{hyp}} \otimes H^{\text{hyp}} \quad \longrightarrow \quad R\,,$$

deren rechtsassozierte Abbildung durch die Matrix

$$\mathcal{R}(\kappa^{\text{hyp}}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_H \\ -\mathrm{id}_{H^*} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.
2) Eine Hopf-Algebra J zusammen mit einer Hopf-Paarung $\kappa : J \otimes J \to R$ heiße *hyperbolisch,* falls es eine Hopf-Algebra H gibt, so daß $(J, \kappa) \cong (H^{\text{hyp}}, \kappa^{\text{hyp}})$ gilt.
3) Eine J-Galois-Algebra X heiße *hyperbolisch,* falls J, versehen mit der Kommutator-Paarung κ_X von X, hyperbolisch ist.

Da die hyperbolische Paarung regulär ist, sind hyperbolische Galois-Algebren stets Azumaya-Algebren(vgl. Satz I.3.9). Ist X eine hyperbolische J-Galois-Algebra, so läßt sich also J als Tensorprodukt $J \cong H^* \otimes H$ darstellen (da H hierdurch im allgemeinen nicht einmal bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, ist eine solche Darstellung stets mit einer gewissen Willkür behaftet). Die Struktur von X als $H^* \otimes H$-Galois-Algebra läßt sich recht genau angeben:

1.2. Proposition:
Ist X eine hyperbolische H^{hyp}-Galois-Algebra (also $\kappa_X = \kappa^{\text{hyp}}$), so sind die Unteralgebren

$$A \;:=\; \mathrm{Gal}\,(H^* \hookrightarrow H^{\text{hyp}})\,(X) \;\in\; \mathrm{Gal}_c(R, H^*)$$

$$B \;:=\; \mathrm{Gal}\,(H \hookrightarrow H^{\text{hyp}})\,(X) \;\in\; \mathrm{Gal}_c(R, H)$$

der H- bzw. H^*-koinvarianten Elemente von X kommutative H- bzw. H^*-Galois-Algebren, und die Multiplikation in X induziert einen Isomorpismus von H^{hyp}-Galois-Algebren

$$m \;:\; A \# B \;\xrightarrow{\sim}\; X$$

$$a \# b \;\longmapsto\; a \cdot b\,,$$

wobei das Smash-Produkt $A \# B$ bezüglich der durch die Auswertung $H^* \otimes H \to R$ gegebenen Hopf-Paarung gebildet wird.

Beweis: Für die hyperbolische Paarung κ^{hyp} gelten:
a) κ^{hyp} beschränkt auf $(H^* \otimes R) \otimes (H^* \otimes R)$ ist trivial,
b) κ^{hyp} beschränkt auf $(R \otimes H) \otimes (R \otimes H)$ ist trivial,
c) κ^{hyp} beschränkt auf $(H^* \otimes R) \otimes (R \otimes H)$ ergibt die Auswertung $H^* \otimes H \to R$.
Man kann dies unmittelbar an der „darstellenden“ Matrix von $\mathcal{R}(\kappa^{\mathrm{hyp}})$ ablesen. Die Behauptung folgt nun aus dem Beweis der Zerlegungseigenschaft I.3.18, wobei a) und b) sicherstellen, daß A und B kommutativ sind. $\diamondsuit$

Wenn wir im folgenden von einer H^{hyp}-Galois-Algebra X sprechen, so meinen wir damit stets eine hyperbolische Galois-Algebra mit $\kappa_X = \kappa^{\mathrm{hyp}}$. Es sei an dieser Stelle noch einmal an den Unterschied zwischen isomorphen bzw. J-isomorphen J-Galois-Algebren erinnert (vgl. I.2.1 bzw. I.2.4). Im Gegensatz zu den vorangegangenen Kapiteln bezeichne im folgenden das Symbol $[X]$ die Galois-Isomorphieklasse von $X \in \mathrm{Gal}\,(R, H)$.

1.3. Definition:
Wir nennen eine volle Unterkategorie $\mathcal{H}$ von R-**Hopf-Alg**, welche bis auf Isomorphie abgeschlossen gegenüber Tensorproduktbildung und Dualisieren ist und die triviale Hopf-Algebra R enthält, *monoidal abgeschlossen.*

Ist $\mathcal{H}$ eine monoidal abgeschlossene Unterkategorie von R-**Hopf-Alg**, so bildet die Menge der Galois-Isomorphieklassen

$$\mathcal{M}\,(\mathcal{H}) \;:=\; \{\,[X]\,|\,X \text{ ist } H^{\mathrm{hyp}}\text{-Galois-Algebra mit } H \in \mathcal{H}\,\}$$

ein abelsches Monoid bezüglich „$\otimes$“: Sind $X = A \# B$ und $Y = C \# D$ G^{hyp}- bzw. H^{hyp}-Galois-Algebren, so ist

$$[X \otimes Y] \;=\; [(A \otimes C) \;\#\; (B \otimes D)]$$

eine $(G \otimes H)^{\mathrm{hyp}}$-Galois-Algebra. Das neutrale Element ist durch die Klasse $[R]$ gegeben. Ferner ist mit $[X]$ auch $[X^{\mathrm{op}}]$ in $\mathcal{M}\,(\mathcal{H})$ gelegen: Ist $X = A \# B$ eine H^{hyp}-Galois-Algebra, so ist

$$[X^{\mathrm{op}}] \;=\; [B \# A]$$

eine $(H^*)^{\mathrm{hyp}}$-Galois-Algebra. Die Menge

$$\mathcal{E}\,(\mathcal{H}) \;:=\; \{\,[A \# E_H] \in \mathcal{M}\,(\mathcal{H})\,|[A] \in \mathrm{Gal}_c(R, H^*),\; H \in \mathcal{H}\,\}$$

ist offensichtlich ein Untermonoid von $\mathcal{M}\,(\mathcal{H})$. Nach I.3.6 gilt für die zugrundeliegenden Algebren

$$A \# E_H \;=\; A \# H^{**} \;\cong\; \mathrm{End}_R(A)\,.$$

1.4. Definition:
Zwei Galois-Algebren $[X]$ und $[X']$ in $\mathcal{M}\,(\mathcal{H})$ heißen *ähnlich,* falls es $[Y]$ und $[Y']$ in $\mathcal{E}\,(\mathcal{H})$ gibt, so daß gilt

$$[X \otimes Y] \;=\; [X' \otimes Y']\,.$$

Wir schreiben in diesem Fall $X \sim X'$ und bezeichnen mit $[[X]]$ die Ähnlichkeitsklasse von X.

1.5. Satz:
Die Menge der Ähnlichkeitsklassen

$$\mathrm{Br}\,(R,\mathcal{H}) \;:=\; \{\, [[X]] \mid [X] \in \mathcal{M}\,(\mathcal{H})\,\}$$

bildet eine abelsche Gruppe mit $[[X^{\mathrm{op}}]]$ *als Inversem zu* $[[X]]$*. Für jedes* $H \in \mathcal{H}$ *ist die Abbildung*

$$\begin{array}{cccll} \# & : & \mathrm{Gal}_c(R,H^*) \times \mathrm{Gal}_c(R,H) & \longrightarrow & \mathrm{Br}\,(R,\mathcal{H}) \\ & & (\,A\,,\,B\,) & \longmapsto & [[A \# B]] \end{array}$$

bilinear. Ferner erhält man einen Homomorphismus

$$\mathrm{Br}\,(R,\mathcal{H}) \quad\longrightarrow\quad \mathrm{Br}\,(R)$$

in die Brauer-Gruppe von R*, indem man einer Galois-Algebra* X *ihre unterliegende* R*-Algebra zuordnet.*

1.6. Definition:
Wir nennen $\mathrm{Br}\,(R,\mathcal{H})$ die *Brauer-Gruppe* der hyperbolischen Galois-Algebren zu $\mathcal{H}$.

Beweis: Nach Konstruktion von $\mathrm{Br}\,(R,\mathcal{H})$ sind offensichtlich:
a) $\mathrm{Br}\,(R,\mathcal{H})$ ist bezüglich „$\otimes$" ein abelsches Monoid.
b) Die Zuordnung $[[X]] \mapsto X$ ist ein wohldefinierter Monoid-Homomorphismus $\mathrm{Br}\,(R,\mathcal{H}) \to \mathrm{Br}\,(R)$.
Die Bilinearität von $\#$ folgt aus dem nachstehenden Lemma im Spezialfall $D = B$ bzw. $C = A^{-1}$.
Sei nun $X = A \# B$ ein Repräsentant von $[[X]] \in \mathrm{Br}\,(R,\mathcal{H})$. Dann ist $Y := A \# B^{-1}$ aufgrund der Bilinearität von $\#$ invers zu X. Wir merken noch an, daß $A \# B^{-1}$ vermöge $a \# b \mapsto b \# a$ isomorph zu $B \# A$ ist, so daß das Inverse zu $[[X]]$ wie behauptet durch $[[X^{\mathrm{op}}]] = [[B \# A]]$ gegeben ist. $\diamondsuit$

1.7. Lemma:
Seien $A, C \in \mathrm{Gal}_c(R,H^*)$ *und* $B, D \in \mathrm{Gal}_c(R,H)$ *kommutative Galois-Algebren. Dann sind die hyperbolischen Galois-Algebren*

$$(A \# B) \otimes (C \# D) \;\cong\; \big((A \star C) \# B\big) \otimes \big(C \# (B^{-1} \star D)\big)$$

als Galois-Algebren isomorph.

Dieses Lemma beinhaltet eine bekannte Aussage über Normrest-Algebren: Ist K ein Körper, der eine primitive n-te Einheitswurzel ζ enthält, ist also der Gruppenring $H = K[C_n]$ selbstdual, so erhält man die Isomorphie

$$\left(\frac{a\,,\,b}{K,\zeta}\right) \otimes \left(\frac{c\,,\,d}{K,\zeta}\right) \;\cong\; \left(\frac{a\cdot c\,,\,b}{K,\zeta}\right) \otimes \left(\frac{c\,,\,b^{-1}\cdot d}{K,\zeta}\right),$$

wobei man den Isomorphismus so wählen kann, daß homogene Elemente auf ebensolche abgebildet werden, wobei sich der Grad um einen Automorphismus der Graduierungsgruppe $(C_n)^4$ ändert [Dr,§11 Lemma 3]. Auch [Dr,§10 Lemma 9] ist ein Spezialfall hiervon.

Beweis: Allgemein gilt folgendes Hilfslemma:
Sei $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G$ ein Automorphismus der Hopf-Algebra G und $\psi := (\varphi^{-1})^* : G^* \xrightarrow{\sim} G^*$. Ist dann $E \# F$ eine hyperbolische G^{hyp}-Galois-Algebra, so gilt

$$\begin{aligned} E \# F &\cong \mathrm{Gal}\,(\psi \otimes \varphi)(E \# F) \\ &\cong \big(\mathrm{Gal}\,(\psi)(E)\big) \,\#\, \big(\mathrm{Gal}\,(\varphi)(F)\big)\,, \end{aligned}$$

wobei die letzte Isomorphie nur davon Gebrauch macht, daß der Automorphismus $\psi \otimes \varphi$ von G^{hyp} die hyperbolische Paarung erhält.
Wir wenden dies auf den Automorphismus

$$\varphi := \begin{pmatrix} 1_H & -1_H \\ 0_H & 1_H \end{pmatrix} \,:\, H \otimes H \xrightarrow{\sim} H \otimes H$$

an. Der Automorphismus ψ ist dann durch die Inverse zur dualisiert-transponierten Matrix, also durch

$$\psi = \begin{pmatrix} 1_{H^*} & 0_{H^*} \\ 1_{H^*} & 1_{H^*} \end{pmatrix} \,:\, H^* \otimes H^* \xrightarrow{\sim} H^* \otimes H^*\,,$$

gegeben, und es folgt:

$$\begin{aligned} (A \# B) \otimes (C \# D) &\cong (A \otimes C) \,\#\, (B \otimes D) \\ &\cong (A \otimes C) \cdot \begin{pmatrix} 1_{H^*} & 0_{H^*} \\ 1_{H^*} & 1_{H^*} \end{pmatrix} \quad \# \quad (B \otimes D) \cdot \begin{pmatrix} 1_H & -1_H \\ 0_H & 1_H \end{pmatrix} \\ &\cong \big((A \star C) \otimes C\big) \,\#\, \big(B \otimes (B^{-1} \star D)\big) \\ &\cong \big((A \star C) \# B\big) \otimes \big(C \# (B^{-1} \star D)\big)\,. \end{aligned}$$ $\diamondsuit$

1.8. Bemerkung:
1) Insbesondere erhält man aus obigem Satz bzw. Lemma die Bilinearität der Abbildung $\# : \mathrm{Gal}_c(R, H^*) \times \mathrm{Gal}_c(R, H) \to \mathrm{Br}\,(R)$. Gamst und Hoechsmann [Ga-Hoe] bzw. Ulbrich [Ul3] haben gezeigt, daß sich diese Abbildung kohomologisch als das Cup-Produkt interpretieren läßt, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(R, \hat{G}) \times H^1(R, G) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Gal}_c(R, H^*) \times \mathrm{Gal}_c(R, H) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \kappa} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \#} \\ H^2(R, G_m) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Br}\,(R) \end{array}$$

kommutiert, wobei $G = R\text{-}\mathbf{Alg}_c(H, -)$ das Gruppenschema zu H, $\hat{G}$ sein Cartier-Dual und κ die vom Cup-Produkt und der bilinearen Abbildung $\hat{G} \times G \to G_m$ (G_m die multiplikatative Gruppe) induzierte Abbildung bezeichnet.

2) Chase definiert in [Ch2, S.176ff.] ebenfalls eine Brauer-Gruppe von Algebren mit Galois-Struktur (er nennt sie Witt-Gruppe). Die hier definierte Brauer-Gruppe $\mathrm{Br}\,(R, \mathcal{H})$ gestattet einen kanonischen Homomorphismus in diese Witt-Gruppe. Ob dieser im Fall $\mathcal{H} = \textbf{Hopf-Alg}$ injektiv bzw. surjektiv ist, scheint i.a. nicht offensichtlich zu sein. Bei der Klärung dieser Frage bereiten Azumaya-Algebren mit nicht-hyperbolischer Galois-Struktur (vgl. Beispiel I.3.20), die bei der Konstruktion von Chase a priori zugelassen werden, gewisse Schwierigkeiten.

1.9. Proposition:
Seien $G, H \in \mathcal{H}$ *und* $\varphi : G \to H$ *eine Hopf-Algebren-Abbildung. Dann gilt für* $A \in \mathrm{Gal}_c(R, G^*)$ *und* $B \in \mathrm{Gal}_c(R, H)$

$$A \ \# \ \mathrm{Gal}\,(\varphi)(B) \quad \sim \quad \mathrm{Gal}\,(\varphi^*)(A) \ \# \ B\,.$$

Beweis: Aus dem Hilfslemma erhält man:

$$\begin{aligned}(A \ \# \ B \cdot \varphi) \otimes (A^{-1} \cdot \varphi^* \ \# \ B) \ &\cong \ (A \otimes A \cdot S \cdot \varphi^*) \ \# \ (B \cdot \varphi \otimes B) \\ &= \ (A \otimes E_{H^*}) \cdot \begin{pmatrix} 1_{G^*} & -\varphi^* \\ 0 & 1_{H^*} \end{pmatrix} \ \# \ (E_G \otimes B) \cdot \begin{pmatrix} 1_G & 0 \\ \varphi & 1_H \end{pmatrix} \\ &\cong \ (A \otimes E_{H^*}) \ \# \ (E_G \otimes B) \ \sim \ R\,,\end{aligned}$$

d.h. $[[A \# B \cdot \varphi]] \cdot [[A \cdot \varphi \# B]]^{-1} = 0$ in $\mathrm{Br}\,(R, \mathcal{H})$. $\diamondsuit$

1.10. Beispiel:
Sei K ein Körper. Wie bereits Hasse [Has] aufgezeigt hat, besteht ein enger Zusammenhang zwischen den kommutativen Galois-Algebren mit abelscher Galois-Gruppe und den abelschen Erweiterungskörpern von K: Ist A eine K^Π-Galois-Algebra, so gibt es eine Untergruppe Π_0 von Π und einen Erweiterungskörper L von K mit Galois-Gruppe Π_0, so daß

$$A \quad \cong \quad \mathrm{Gal}\,(\,K^\iota : K^\Pi \to K^{\Pi_0}\,)\,(L)$$

gilt, wobei K^ι die von der Inklusion $\iota : \Pi_0 \hookrightarrow \Pi$ induzierte Surjektion bezeichnet. Wir stellen den Beweis dieser Behauptung für einen Moment zurück, um zunächst die Proposition anzuwenden: Ist B eine kommutative, Π-vollgraduierte Algebra, so folgt

$$A \# B \quad \sim \quad L \# B_0$$

mit $B_0 \ = \ \mathrm{Gal}\,(\,K[\iota] \ : \ K[\Pi_0] \ \to \ K[\Pi]\,)\,(B)$. Insbesondere erhält man aus einer Zerlegung

$$\Pi_0 \ = \ \langle\, \sigma_1 \,\rangle \times \ldots \times \langle\, \sigma_r \,\rangle$$

von Π_0 in ein Produkt zyklischer Untergruppen eine Darstellung der Klasse von $A \# B$ in $\mathrm{Br}\,(K)$ als Produkt zyklischer Algebren

$$A \# B \ \sim \ L_1 \# B_1 \otimes \ldots \otimes L_r \# B_r\,,$$

falls $L = L_1 \otimes \ldots L_r$ bzw. $B_0 = B_1 \otimes \ldots B_r$ die zugehörigen Zerlegungen von L bzw. B_0 sind.

Um die Existenz von L und Π_0 zu beweisen, betrachten wir die Bahnzerlegung der zu A gehörigen $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(K_s/K)$-Menge $\hat{A}$:

$$\hat{A} \ = \ A_0 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, A_s$$

(diese Zerlegung entspricht einer Darstellung der halbeinfachen Algebra A als Produkt von Erweiterungskörpern von K). Der triviale Γ-Modul Π operiert einfach-transitiv auf $\hat{A}$, so daß

$$\Pi_0 \;:=\; \{\pi \in \Pi \,|\, \pi(\hat{A}_0) \subset \hat{A}_0\}$$

eine Untergruppe von Π ist, deren Kardinalität mit der von $\hat{A}_0$ übereinstimmt. Somit operiert Π_0 einfach transitiv auf $\hat{A}_0$, d.h. der zu $\hat{A}_0$ gehörende Körper L ist eine K^{Π_0}-Galois-Algebra mit $A \cong \mathrm{Gal}\,(K^\iota)(L)$. Es sei noch angemerkt, daß L und Π_0 nicht von der Wahl der Γ-Bahn $\hat{A}_0$ abhängig sind, da je zwei Bahnen durch ein geeignetes Element von Π ineinander überführt werden können.

Im allgemeinen ist eine solche Reduktion von H-Galois-Algebren auf Körpererweiterungen zu einer Unter-Hopf-Algebra nicht möglich, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt:

a) K besitze einen zyklischen Erweiterungskörper vom Grad 4, d.h. es gibt einen stetigen Epimorphismus $p : \Gamma \to \mathbf{Z}/(4)$, vermöge dessen sich jede $\mathbf{Z}/(4)$-Menge als Γ-Menge auffassen läßt. Bezeichne $\gamma = 1 + 4\mathbf{Z}$ den kanoischen Erzeuger von $\mathbf{Z}/(4)$.

b) Die Multiplikation mit 3 induziert einen Automorphismus von der abelschen Gruppe $\mathbf{Z}/(8)$ der Ordnung 2. Der durch $\gamma \cdot (n + 8\mathbf{Z}) = 3n + 8\mathbf{Z}$ definierte Γ-Modul werde mit Π bezeichnet, die korrespondierende Hopf-Algebra mit H.

c) Auf der Menge $\mathbf{Z}/(8)$ ist durch $\gamma * (m + 8\mathbf{Z}) = 3m + 1 + 8\mathbf{Z}$ eine Bijektion der Ordnung 4 gegeben. X bezeichne die so definierte Γ-Menge, A die zugehörige separable K-Algebra.

Offenbar ist die Rechtstranslation $X \times \Pi \to X$ Γ-linear, so daß A eine H-Galois-Algebra darstellt. X besteht aus zwei Γ-Bahnen, nämlich $\{0, 1, 4, 5\}$ bzw. $\{2, 7, 6, 3\}$. Der zugehörige Stabilisator ist beidesmal der Γ-Untermodul $\{0, 4\}$, der schon aus Kardinalitätsgründen nicht transitiv auf einer dieser Bahnen operieren kann.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir die die Brauer-Gruppe $\mathrm{Br}\,(R, \mathcal{H})$ in einigen einfachen Fällen berechnen. Hierzu betrachten wir für eine fest vorgegebene Hopf-Algebra H die von den Objekten

$$\underbrace{H \otimes \ldots \otimes H}_{r} \otimes \underbrace{H^* \otimes \ldots \otimes H^*}_{s} \qquad (r, s \geq 0)$$

gebildete volle Unterkategorie $\langle\, H \,\rangle$ von R-**Hopf-Alg**. Diese ist offenbar eine kleinste Unterkategorie, welche bis auf Isomorphie abgeschlossen gegenüber Tensorproduktbildung und Dualisieren ist und die Hopf-Algebra H (für $s = 0$) enthält. Für dieses System von Hopf-Algebren ist der von der bilineare Abbildung

$$\# \;:\; \mathrm{Gal}_c(H^*) \times \mathrm{Gal}_c(H) \;\longrightarrow\; \mathrm{Br}\,(R, \langle\, H \,\rangle\,)$$

induzierte Homomorphismus

$$\# \;:\; \mathrm{Gal}_c(H^*) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Gal}_c(H) \;\longrightarrow\; \mathrm{Br}\,(R, \langle\, H \,\rangle\,)$$

surjektiv (vgl. Folgerung I.2.12.a). Um Verwechslungen zu vermeiden, verwenden wir im folgenden das Symbol „$\odot$“ anstelle von „$\otimes_{\mathbf{Z}}$“, um Elemente von $\mathrm{Gal}_c(H^*) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Gal}_c(H)$ zu notieren.

1.11. Lemma:
Der Kern der Abbildung $\# : \mathrm{Gal}_c(H^*) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Gal}_c(H) \to \mathrm{Br}\,(R, \langle\, H\,\rangle\,)$ *besteht aus den Tensoren*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \odot B_i \;-\; \sum_{i=1}^{n} C_i \odot D_i\,,$$

wobei für die $A_i, C_i \in \mathrm{Gal}_c(H^*)$ *bzw.* $B_i, D_i \in \mathrm{Gal}_c(H^*)$ *gilt: Es gibt einen paarungserhaltenden Automorphismus*

$$\varphi \;:\; \Big(\underbrace{H \otimes \ldots \otimes H}_{n}\Big)^{\mathrm{hyp}} \;\xrightarrow{\;\sim\;}\; \Big(\underbrace{H \otimes \ldots \otimes H}_{n}\Big)^{\mathrm{hyp}}$$

mit

$$\mathrm{Gal}\,(\varphi)\big((A_1 \otimes \ldots A_n)\,\#\,(B_1 \otimes \ldots B_n)\big) \quad = \quad (C_1 \otimes \ldots C_n)\,\#\,(D_1 \otimes \ldots D_n)\,.$$

Beweis: Die angegebenen Elemente liegen sicherlich im Kern von $\#$, da nach Voraussetzung $(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)\,\#\,(B_1 \otimes \ldots \otimes B_n)$ isomorph und somit insbesondere ähnlich zu $(C_1 \otimes \ldots \otimes C_n)\,\#\,(D_1 \otimes \ldots \otimes D_n)$ ist. Umgekehrt sei ein Element

$$\sum_{j=1}^{r} A_j \odot B_j \;-\; \sum_{k=1}^{s} C_k \odot D_k$$

im Kern von $\#$ vorgegeben. Dann gibt es Galois-Algebren E und F in $\mathcal{E}\,(\,\langle\, H\,\rangle\,)$ mit

$$\Big(\bigotimes_{j=1}^{r} A_j \,\#\, B_j\Big) \otimes E \;\cong\; \Big(\bigotimes_{k=1}^{s} C_k \,\#\, D_k\Big) \otimes F\,.$$

Auf jeder Seite steht eine Galois-Algebra zu einem n- bzw. m-fachen Tensorprodukt von H^{hyp} und eine Rangbetrachtung (nach Lokalisieren bei einem beliebigen Primideal von R) ergibt $n = m$. Nach Definition von $\mathcal{E}\,(\,\langle\, H\,\rangle\,)$ lassen sich E bzw. F darstellen als

$$E \;=\; \bigotimes_{j=r+1}^{n} A_j \,\#\, B_j \qquad \text{bzw.}$$

$$F \;=\; \bigotimes_{k=s+1}^{n} C_k \,\#\, D_k,$$

wobei für jedes $j > r$ entweder $A_j = H^*$ oder $B_j = H$, bzw. für jedes $k > s$ $C_k = H^*$ oder $D_k = H$ gilt. Folglich gelten

$$\sum_{j=1}^{r} A_j \odot B_j \;=\; \sum_{i=1}^{n} A_i \odot B_i \qquad \text{bzw.}$$

$$\sum_{k=1}^{s} C_k \odot D_k \;=\; \sum_{i=1}^{n} C_i \odot D_i.$$

Aus der Isomorphie der Galois-Algebren

$$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i \,\#\, B_i \;\cong\; \bigotimes_{i=1}^{n} C_i \,\#\, D_i$$

folgt mit Korollar I.3.13 die Behauptung. $\diamondsuit$

Wie in Abschnitt I.2 ausgeführt, ist $\mathrm{Gal}_c(H)$ ein Rechtsmodul über dem Hopf-Algebren-Endomorphismenring E von H. Da sich der Endomorphismenring von H^* mit dem entgegengesetzten Ring E^{op} zu E identifizieren läßt (vermöge $\varphi \mapsto \varphi^*$), ist $\mathrm{Gal}_c(H^*)$ ein E-Linksmodul. Aufgrund von Proposition 1.9 induziert $\#$ einen wohldefinierten Homomorphismus

$$\# \;:\; \mathrm{Gal}_c(H^*) \otimes_{E^{\mathrm{op}}} \mathrm{Gal}_c(H) \;\longrightarrow\; \mathrm{Br}\,(R, \langle\, H \,\rangle\,)\,.$$

1.12. Korollar:
Falls H nur die triviale Hopf-Algebren-Abbildung in sein Dual gestattet, so ist

$$\# \;:\; \mathrm{Gal}_c(H^*) \otimes_{E^{\mathrm{op}}} \mathrm{Gal}_c(H) \;\longrightarrow\; \mathrm{Br}\,(R, \langle\, H \,\rangle\,)$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

Beweis: Unter der Voraussetzung $\mathbf{Hopf\text{-}Alg}(H, H^*) = 0$ ist die darstellende Matrix eines paarungserhaltenden Automorphismuses φ von $(H^{\otimes n})^{\mathrm{hyp}}$ eine Blockmatrix von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \psi^{*-1} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix},$$

wobei ψ den durch Einschränkung von φ auf $R \otimes H^{\otimes n}$ gewonnenen Automorphismus von $H^{\otimes n}$ bezeichnet.
Sei nun $\sum A_i \odot B_i - \sum C_i \odot D_i$ eine Relation von dem oben betrachteten Typ, welche von dem Automorphismus φ herrührt. Ist $(\psi_{i,j})$ die Matrix zu ψ, so gelten also

$$\begin{aligned} \big(C_1 \otimes \ldots \otimes C_n\big) &= \big(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n\big) \cdot (\psi_{i,j}) \quad \text{bzw.} \\ \big(B_1 \otimes \ldots \otimes B_n\big) &= \big(D_1 \otimes \ldots \otimes D_n\big) \cdot (\psi^*_{j,i}), \end{aligned}$$

so daß die zugehörige Relation die Form

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \odot \Big(\mathop{\star}_{k=1}^{n} D_k \cdot \psi^*_{i,k}\Big) \quad - \quad \sum_{i=1}^{n} \Big(\mathop{\star}_{k=1}^{n} A_k \cdot \psi_{k,i}\Big) \odot D_i$$

annimmt. Diese ist offenbar im über E^{op} gebildeten Tensorprodukt erfüllt. $\diamondsuit$

Die Voraussetzungen dieses Korollars sind etwa für den Gruppenring $K[C_n]$ zur zyklischen Gruppe der Ordnung n erfüllt, falls der Grundkörper K außer der Eins keine weiteren n-ten Einheitswurzeln enthält (falls die Charakteristik nicht 2 ist, muß n also insbesondere ungerade sein). In diesem Fall gilt somit

$$\mathrm{Br}\,(K, \langle\, K[C_n] \,\rangle\,) \;\cong\; \mathrm{Gal}_c(K, K^{C_n}) \otimes_{\mathbf{Z}} K^*/K^{*n}\,.$$

Aber auch in einem anderen Extremfall läßt sich $\mathrm{Br}\,(K, \langle\, K[C_n] \,\rangle\,)$ berechnen:

1.13. Beispiel:
Sei p eine Primzahl und K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq p$, welcher eine primitive p-te Einheitswurzel ζ enthalte, so daß der Gruppenring $H := K[C_p]$ selbstdual ist. Dann wird der Kern der surjektiven Abbildung

$$\# \ : \ K^*/K^{*p} \otimes_{\mathbf{Z}} K^*/K^{*p} \ \to \ \mathrm{Br}\,(K, \langle\, K[C_p]\,\rangle\,)$$

von den Tensoren

$$\begin{aligned} (\,a\,|\,b\,) \ - \ (\,b\,|\,a^{-1}\,) \quad & \text{und} \\ (\,a\,|\,b\,) \ - \ (\,\zeta^{\binom{p}{2}} \cdot a \cdot b\,|\,b\,) \quad & (a, b \in K^*/K^{*p}) \end{aligned}$$

erzeugt. Für $p > 2$ bzw. $p = 2$ und $-1 \in K^{*2}$ lassen sich diese Relationen zu $(\,a\,|\,a\,)$ $(a \in K^*/K^{*p})$ zusammenfassen.

Beweis: Sei σ ein zyklisches Erzeugendes von C_p. Identifizieren wir H^* mit H und

$$\mathrm{Gal}_c(K, H^*) \ \cong \ \mathrm{Gal}_c(K, H) \ \cong \ K^*/K^{*p}$$

wie in I.2.13.2, so gilt

$$\#(\,a\,|\,b\,) \ = \ \left(\frac{a\,,\,b}{K, \zeta}\right) \ = \ K\,\langle U, V\,\rangle \,/\, \big(U^n - a, V^n - b, V \cdot U - \zeta \cdot U \cdot V\big)\,,$$

wobei $u := \bar{U}$ und $v := \bar{V}$ homogen vom Grad $(\sigma, 1)$ bzw. $(1, \sigma)$ sind.
Verändert man diese Gradabbildung durch Anschließen des Automorphismuses

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ : \ C_p \times C_p \xrightarrow{\sim} C_p \times C_p\,,$$

so besitzen die Elemente

$$u' := u \cdot v \quad \text{und} \quad v' := v$$

nunmehr Grad $(\sigma, 1)$ bzw. $(1, \sigma)$, und es gilt

$$u'^n = \zeta^{\binom{p}{2}} \cdot a \cdot b\,.$$

Ferner erfüllen auch u' und v' die Vertauschungrelation $v' \cdot u' = \zeta \cdot u' \cdot v'$, so daß die Norm-Rest-Algebren

$$\left(\frac{a\,,\,b}{K, \zeta}\right) \ \cong \ \left(\frac{\zeta^{\binom{p}{2}} \cdot a \cdot b\,,\,b}{K, \zeta}\right)$$

als vollgraduierte Algebren isomorph sind, woraus die Gültigkeit der zweiten angegebenen Relation in $\mathrm{Br}\,(K, \langle\, K[C_p]\,\rangle\,)$ folgt. Die erste Relation trat bereits im Beweis des Satzes 1.5 auf (und läßt sich ebenso elementar nachvollziehen).

Es bleibt zu zeigen, daß der Kern von # von diesen beiden Relationen erzeugt wird. Hierzu verwenden wir, daß die Bildung des Gruppenrings eine Äquivalenz der Kategorie der endlich-dimensionalen $\mathbf{F_p}$-Vektorräume mit $\langle\, K[C_p]\,\rangle$ darstellt, wobei den paarungserhaltenden Automorphismen von $H^{\otimes n}{}^{\mathrm{hyp}}$ gerade die Elemente der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{F_p})$ entsprechen. Letztere wird von den Matrizen

$$\begin{aligned} E_i &:= \begin{pmatrix} I & e_{i,i} \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ F_{i,j} &:= \begin{pmatrix} I & e_{i,j} + e_{j,i} \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ D_{i,j} &:= \begin{pmatrix} I + e_{i,j} & 0 \\ 0 & I - e_{i,j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und ihren Transponierten erzeugt, wobei I die Einheitsmatrix der Größe n sowie $e_{i,j}$ die $n \times n$-Matrix mit einer Eins an der Position (i, j) und Nullen sonst bezeichnen (vgl. [O'M, S.31 unten]). Während die Matrizen $D_{i,j}$ für die Bilinearität von # verantwortlich sind, ergeben die E_i die Relationen vom zweiten Typ. Die Matrizen $F_{i,j}$ schließlich führen zu Relationen der Gestalt

$$(\, a \,|\, b \,) \cdot (\, c \,|\, d \,) = (\, a \,|\, b \cdot c \,) \cdot (\, c \,|\, a \cdot d \,)\,.$$

Diese lassen sich aus den beiden angegebenen Relationen und der Bilinearität folgern. $\diamondsuit$

III.2. Korestriktion und Projektionsformel

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, inwieweit die Korestriktion bezüglich einer endlichen separablen Körpererweiterung mit dem Konzept der Brauer-Gruppe von hyperbolischen Galois-Algebren in Einklang gebracht werden kann.

2.1. Proposition:
Seien $\mathcal{F} : R\text{-}\mathbf{Mod} \to S\text{-}\mathbf{Mod}$ *ein monoidaler Funktor und* $\mathcal{H}$ *bzw.* $\mathcal{H}'$ *monoidal abgeschlossene Unterkategorien von* R*- bzw.* S*-Hopf-Algebren derart, daß für jedes* $H \in \mathcal{H}$ *ein zu* $\mathcal{F}(H)$ *isomorphes* $H' \in \mathcal{H}'$ *existiert. Dann induziert* $\mathcal{F}$ *einen Homomorphismus abelscher Gruppen*

$$\begin{array}{rcccl} F & : & \mathrm{Br}\,(R,\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathrm{Br}\,(S,\mathcal{H}') \\ & & [[X]] & \longmapsto & [[\mathcal{F}(X)]]\,. \end{array}$$

Beweis: Dies ergibt sich unmittelbar aus den Ergebnissen von Abschnitt I.4. Insbesondere gilt für $A \in \mathrm{Gal}_c(R,H^*)$ und $B \in \mathrm{Gal}_c(R,H)$

$$\mathcal{F}(A \# B) \;=\; \mathcal{F}A \;\#\; \mathcal{F}B$$

mit $\mathcal{F}A \in \mathrm{Gal}_c(S,\mathcal{F}H^*)$ und $\mathcal{F}B \in \mathrm{Gal}_c(S,\mathcal{F}H)$. $\diamondsuit$

Wir fixieren nun einen Grundkörper K.

2.2. Definition:
Sei $\mathcal{H}$ eine monoidal abgeschlossene Unterkategorie von K-**Hopf-Alg**.
1) Für einen beliebigen Erweiterungskörper L von K bezeichne $\mathcal{H}_L$ die volle Unterkategorie von L-**Hopf-Alg**, die aus allen Objekten der Form $H_L = L \otimes_K H$ mit $H \in \mathcal{H}$ besteht.
2) $\mathcal{H}$ heiße *korestringierbar,* falls für jede endliche, separable Körpererweiterung L/K und für jedes $H_L \in \mathcal{H}_L$ eine zu $\mathrm{Cor}_{L/K}(H_L)$ isomorphe Hopf-Algebra in $\mathcal{H}$ enthalten ist.

2.3. Folgerung:
Sei $\mathcal{H}$ *eine korestringierbare Unterkategorie von* K-**Hopf-Alg** *und* L *ein endlicher, separabler Erweiterungskörper von* K*. Dann induzieren sowohl die Skalarbereichserweiterung* $L\otimes_K$ *als auch die Korestriktion* $\mathrm{Cor}_{L/K}$ *Homomorphismen abelscher Gruppen*

$$\begin{array}{rcccl} L\otimes_K & : & \mathrm{Br}\,(K,\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathrm{Br}\,(L,\mathcal{H}_L) \\ \mathrm{Cor}_{L/K} & : & \mathrm{Br}\,(L,\mathcal{H}_L) & \longrightarrow & \mathrm{Br}\,(K,\mathcal{H})\,. \end{array}$$

2.4. Beispiele:

Die im vorangegangenen Abschnitt betrachteten „zyklischen" Unterkategorien $\langle H \rangle$ sind im allgemeinen nicht korestringierbar: Wie zu Beginn von Abschnitt II.2 angemerkt, ist etwa die Korestriktion eines konstanten Gruppenschemas bis auf Trivialfälle nicht wieder konstant. Als Beispiele für korestringierbare Systeme seien neben **Hopf-Alg** selbst folgende Unterkategorieen genannt:

1) $\mathcal{H}_{et,et}$, die Kategorie aller separablen Hopf-Algebren mit separablen Dual (diese ist antiäquivalent zur Kategorie derjenigen stetigen $\mathrm{Gal}\,(K_s/K)$-Moduln, deren zugrundeliegende abelsche Gruppen keine $p = \mathrm{char}(K)$-Torsion besitzen),
2) $\mathcal{H}_{et,con}$, die Kategorie aller Hopf-Algebren der Form $G \otimes H$ mit G, H^* separabel und G^*, H zusammenhängend,
3) $\mathcal{H}_{con,con}$, die Kategorie aller zusammenhängender Hopf-Algebren mit zusammenhängendem Dual sowie
4) $\mathcal{H}_r$, die Kategorie aller Hopf-Algebren mit vorgegebenem Exponenten r (hier muß man K noch extra hinzufügen).

2.5. Satz (Projektionsformel):

Seien L ein endlicher, separabler Erweiterungskörper von K, $\mathcal{H}$ ein korestringierbares System von K-Hopf-Algebren sowie $H \in \mathcal{H}$. Dann gilt für $A \in \mathrm{Gal}_c(K, H^*)$ und $B \in \mathrm{Gal}_c(L, H_L)$

$$\mathrm{Cor}_{L/K}\big((L \otimes_K A) \ \# \ B\big) \quad \sim \quad A \ \# \ \mathrm{N}_{L/K}(B)\,,$$

wobei $\mathrm{N}_{L/K}(B)$ die in Abschnitt II.2 untersuchte H-Norm der über L definierten Galois-Algebra B bezeichnet.

Beweis: Der Adjunktionsmorphismus $\mu_A : \mathrm{Cor}_{L/K}(L \otimes_K A) \to A$ (vgl. II.1.7) ist ein $\mu_{H^*} : \mathrm{Cor}_{L/K}(L \otimes_K H^*) \to H^*$-Galois-Morphismus, so daß

$$\mathrm{Cor}_{L/K}(L \otimes_K A) \ = \ \mathrm{Gal}\,(K, \mu_{H^*})(A)$$

gilt. Wegen $\mu_{H^*}^* = \delta_H$ (vgl.II.1.15.1) folgt nach Proposition 1.9 und der Definition der H-Norm

$$\begin{aligned} \mathrm{Cor}_{L/K}\big((L \otimes_K A) \ \# \ B\big) \ &= \ \mathrm{Cor}_{L/K}(L \otimes_K A) \ \# \ \mathrm{Cor}_{L/K}(B) \\ &= \ \mathrm{Gal}\,(\mu_{H^*})(A) \ \# \ \mathrm{Cor}_{L/K}(B) \\ &\sim \ A \ \# \ \mathrm{Gal}\,(\delta_H)(\mathrm{Cor}_{L/K}(B)) \\ &= \ A \ \# \ \mathrm{N}_{L/K}(B)\,. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2.6. Bemerkung:

1) Wie in 1.8 angemerkt, läßt sich die Abbildung $\# : \mathrm{Gal}_c(H^*) \times \mathrm{Gal}_c(H) \to \mathrm{Br}\,(K)$ kohomologisch als Cup-Produkt interpretieren. Für separable Hopf-Algebren mit separablem Dual erhält man die Projektionsformel aus der Galois-Kohomologie (vgl. [C-E, Gleichung (12), S. 256]).
2) Tignol gab kürzlich einen kohomologiefreien Beweis im Spezialfall von Normrest-Algebren [Ti, Theorem 3.2].

2.7. Folgerung:
Seien L ein endlicher, separabler Erweiterungskörper von K und $\mathcal{H}$ ein korestringierbares System von K-Hopf-Algebren. Dann ist die Komposition

$$\mathrm{Br}\,(K,\mathcal{H}) \quad \xrightarrow{L\otimes_K} \quad \mathrm{Br}\,(L,\mathcal{H}_L) \quad \xrightarrow{\mathrm{Cor}_{L/K}} \quad \mathrm{Br}\,(K,\mathcal{H})$$

gleich der Multiplikation mit dem Erweiterungsgrad $[L:K]$.

Beweis: Sei $n=[L:K]$ der Grad der Erweiterung. Für $A\in \mathrm{Gal}_c(K,H^*)$ und $B\in \mathrm{Gal}_c(K,H)$ gilt aufgrund der Projektionsformel und Proposition II.2.4

$$\begin{aligned}\mathrm{Cor}_{L/K}\big((L\otimes_K A)\ \#\ (L\otimes_K B)\big) &\sim A\ \#\ \mathrm{N}_{L/K}(L\otimes_K B)\\ &= A\ \#\ n\cdot(B)\\ &= n\cdot(A\,\#\,B)\,.\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2.8. Folgerung:
Sei $\mathcal{H}$ ein korestringierbares System von K-Hopf-Algebren, welches den Gruppenring $H:=K[C_n]$ beinhaltet. Ist dann

$$X \;=\; L\ \#\ K[X]/(X^n-b)$$

die zyklische Algebra zum zyklischen Erweiterungskörper $L\in \mathrm{Gal}_c(K,H^*)$ von K und $b\in K^*$, so gilt: X ist genau dann trivial in $\mathrm{Br}\,(K,\mathcal{H})$, wenn b eine Norm bezüglich der Erweiterung L/K ist.

Beweis: Sei b die Norm von $b'\in L^*$. Dann ist die zyklische L-Algebra

$$X' \;=\; (L\otimes_K L)\ \#\ L[X]/(X^n-b')$$

trivial in $\mathrm{Br}\,(L,\mathcal{H}_L)$, da $L\otimes_K L$ die triviale $L\otimes_K H^*$-Galois-Algebra ist. Nach der Projektionsformel und Beispiel II.2.5.1 gilt $X\sim \mathrm{Cor}_{L/K}X'$, so daß $[[X]]=0$ in $\mathrm{Br}\,(K,\mathcal{H})$ folgt. Die Umkehrung gilt bekanntlich in $\mathrm{Br}\,(K)$, also erst recht in $\mathrm{Br}\,(K,\mathcal{H})$. $\diamondsuit$

2.9. Beispiel:
Sei $q\equiv 3 \bmod 4$ eine Primzahlpotenz, so daß -1 kein Quadrat in $K:=\mathbf{F}_q$ ist. Nach Beispiel 1.13 gilt dann

$$\mathrm{Br}\,(\mathbf{F}_q,\,\langle\,\mathbf{F}_q[C_2]\,\rangle\,) \;\cong\; C_2\,,$$

d.h. es gibt eine in $\mathrm{Br}\,(\mathbf{F}_q,\,\langle\,\mathbf{F}_q[C_2]\,\rangle\,)$ nicht triviale Quaternionenalgebra (nämlich $(-1,-1)$). Da die Normabbildung zu einer Erweiterung endlicher Körper surjektiv ist, kann $\langle\,\mathbf{F}_q[C_2]\,\rangle$ insbesondere nicht korestringierbar sein. Vielmehr ist für jedes korestringierbare System $\mathcal{H}$, welches $\mathbf{F}_q[C_2]$ umfaßt, die induzierte Abbildung

$$\mathrm{Br}\,(\mathbf{F}_q,\,\langle\,\mathbf{F}_q[C_2]\,\rangle\,) \;\to\; \mathrm{Br}\,(\mathbf{F}_q,\mathcal{H})$$

die Nullabbildung.

2.10. Bemerkung:

Auch im Hinblick auf die immer noch nicht vollständig beantwortete Frage, ob die Brauer-Gruppe eines beliebigen Körpers K von den zyklischen Algebren erzeugt wird, erscheinen folgende Fragen von besonderem Interesse zu sein:

(I) Ist die natürliche Abbildung

$$\mathrm{Br}\,(K, \textbf{Hopf-Alg}) \longrightarrow \mathrm{Br}\,(K)$$

surjektiv bzw. wie läßt sich ihr Bild beschreiben?

(II) Wird $\mathrm{Br}\,(K, \textbf{Hopf-Alg})$, oder zumindest $\mathrm{Br}\,(K, \mathcal{H}_{et,et})$ von den zyklischen Algebren erzeugt?

Von eher sekundärem Interesse scheint zu sein:

(III) Ist die natürliche Abbildung

$$\mathrm{Br}\,(K, \textbf{Hopf-Alg}) \longrightarrow \mathrm{Br}\,(K)$$

injektiv bzw. wie läßt sich ihr Kern beschreiben?

Im folgenden sollen bekannte Aussagen über die Brauersche Gruppe in diesem Zusammenhang interpretiert werden.

1) Der Satz von Merkurjev und Suslin [Me-Su] besagt, daß für einen Körper K, welcher eine primitive n-te Einheitswurzel ζ enthält, der sogenannte Normresthomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} R_n & : & K_2(K) & \to & \mathrm{Br}\,(K) \\ & & \{a, b\} & \mapsto & \left(\dfrac{a\,,\,b}{K, \zeta}\right) \end{array}$$

einen Isomorphismus von $k_2(K) := K_2(K) \,/\, n \cdot K_2(K)$ mit dem n-Torsionsteil ${}_n\mathrm{Br}\,(K)$ von $\mathrm{Br}\,(K)$ induziert. Insbesondere ist also das Bild von

$$\mathrm{Br}\,(K, \langle\, K[C_n]\,\rangle\,) \to \mathrm{Br}\,(K)$$

gleich dem n-Torsionsteil ${}_n\mathrm{Br}\,(K)$.

2) Für Körper der positiven Charakteristik p hat Albert [Al, Theorem 31, S. 109] gezeigt, daß jede p-Algebra über K ähnlich zu einer zyklischen Algebra ist. Ein ähnliches Resultat [Dr, Theorem 4, S. 109] besagt, daß für jede Potenz $q = p^e$ von p das Bild der Abbildung

$$\mathrm{Br}\,(K, \langle\, K[C_q]\,\rangle\,) \to \mathrm{Br}\,(K)$$

gleich dem q-Torsionsteil ${}_q\mathrm{Br}\,(K)$ ist. Für $q = p$ gilt gleiches für die Hopf-Algebra H zum Schema α_p anstelle des Gruppenrings $K[C_p]$ (sogar für beliebige Grundringe der Charakteristik p) [K-O-S, Theorem 6.7].

3) Die voranstehenden Resultate geben Anlaß zu folgender Verschärfung von (I)

(I') Ist für beliebiges $r > 0$ die Abbildung

$$\mathrm{Br}\,(K, \mathcal{H}_r) \longrightarrow {}_r\mathrm{Br}\,(K)$$

surjektiv? ($\mathcal{H}_r$: vgl. 2.4.4).

Wie aus einer Arbeit von Merkurjev [Me] folgt, ist dies für jede nicht durch 8 teilbare Primzahlpotenz (und damit für jede nicht durch 8 teilbare natürliche Zahl) r zutreffend. Merkurjev zeigt nämlich, daß für jede ungerade Primzahl p der $q = p^e$-Torsionsteil der Brauer-Gruppe eines beliebigen Körpers K der Charakteristik ungleich p von dem Bild der Korestriktionsabbildung

$$\mathrm{Cor}_{K[\zeta_q]/K} \;:\; \mathrm{Br}\,(K[\zeta_q]) \;\rightarrow\; \mathrm{Br}\,(K)$$

(ζ_q eine primitive q-te Einheitswurzel in K_s) erzeugt wird. Für $p = 2$ ist dies i.a. nicht zutreffend, jedoch wird ${}_4\mathrm{Br}\,(K)$ von $\mathrm{Cor}_{K[i]/K}({}_4\mathrm{Br}\,(K[i]))$ und den Quaternionenalgebren erzeugt. Zusammen mit dem Satz von Merkurjev und Suslin folgt hieraus die Behauptung, da $\mathcal{H}_r$ korestringierbar ist.

4) Childs [Chi2] untersucht ein Analogon zu (I') für reell quadratische Zahlringe und $r = 2$.

5) Aus dem Satz von Merkurjev und Suslin ergibt sich ein gewisser Zusammenhang von (II) und (III): Unter den Voraussetzungen von 1) faktorisiert der Normresthomomorphismus aufgrund von Folgerung 2.8 zu

$$R_n \;:\; K_2(K) \;\rightarrow\; \mathrm{Br}\,(K, \mathcal{H}_n) \;\rightarrow\; \mathrm{Br}\,(K)\,.$$

Folglich ist $\mathrm{Br}\,(K, \mathcal{H}_n) \rightarrow \mathrm{Br}\,(K)$ genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Br}\,(K, \mathcal{H}_n)$ von den zyklischen Algebren der Ordnung n erzeugt wird.

6) Rosset und Tate [Ro-Ta] beweisen ein Reziprozitätsgesetz für die Korestriktion von Normrest-Algebren und folgern: Enthält K eine primitive n-te Einheitswurzel ζ und ist L ein separabler Erweiterungskörper von K vom Grad d, so gibt es zu $a, b \in L^*$ Elemente $a_1, b_1, \ldots, a_d, b_d \in K^*$ mit

$$\mathrm{Cor}_{L/K}\left(\frac{a\,,\,b}{L, \zeta}\right) \;\sim\; \bigotimes_{i=1}^{d} \left(\frac{a_i\,,\,b_i}{K, \zeta}\right).$$

Der in [Dr, S. 88ff.] gegebene Beweise hierzu verwendet neben Rechenregeln für den Funktor $\mathrm{Cor}_{L/K}$ nur Aussagen über Normrest-Algebren, die nach Folgerung 2.8 auch in $\mathrm{Br}\,(K, \mathcal{H}_n)$ gelten und liefert somit eine gewisse Evidenz für die Gültigkeit von (II). (In [Ro-Ta] wird der Beweis allgemeiner für Milnor-Funktoren anstelle von Normrest-Algebren geführt, wobei jedoch etwas weitreichendere Forderungen an die Existenz einer Korestriktion bzw. Spurabbildung gestellt werden als hier für $\mathrm{Br}\,(K, \mathcal{H}_n)$ gezeigt wurde; vgl. loc.cit. Teil (ii) der Definition eines Milnor-Funktors). Ähnliche Aussagen wurden auch für zyklische p-Algebren bewiesen [Ma, C-K-T].

Literaturverzeichnis:

[Al] A. A. Albert: *Structure of algebras.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XXIV, 1939.

[C-E] H. Cartan, S. Eilenberg: *Homological algebra.* Princeton Math. Ser. 19, Princeton, 1956.

[Ch1] S. U. Chase: *On principal homogeneous spaces and bilinear forms.* Vorabdruck 1975.

[Ch2] S. U. Chase: *On a variant of the Witt and Brauer Groups.* In: Brauer groups, Evanston 1975. Lecture notes in Mathematics 549. Springer-Verlag, 1976, 148–187.

[C-H-R] S. U. Chase, D. K. Harrison, A. Rosenberg: *Galois theory and Galois cohomology of commutative rings.* Mem. Amer. Math. Soc. 52 (1965), 15–33.

[Ch-Sw] S. U. Chase, M. E. Sweedler: *Hopf algebras and Galois theory.* Lecture notes in Mathematics 97. Springer-Verlag, 1966.

[Chi] L. N. Childs: *Cyclic Stickelberger cohomology and descent of Kummer extensions.* Proc. Amer. Math. Soc. 90 (1984), 505–510.

[Chi2] L. N. Childs: *Representing classes in the Brauer group of quadratic number rings as smash products.* Pacific J. Math. 129 (1987), 243–255.

[C-K-T] Huah Chu, Ming-chang Kang, Eng-Tjioe Tan: *The corestriction of p-symbols.* Comm. Algebra 16 (1988), 735–741.

[De-Ga] M. Demazure, P. Gabriel: *Groups algèbriques.* Tome I. North-Holland Co. Amsterdam 1970.

[DM-In] F. R. DeMeyer, E. Ingraham: *Separables algebras over commutative rings.* Lecture notes in Mathematics 181. Springer-Verlag, 1971.

[Dr] P. K. Draxl: *Skew fields.* London Math. Soc. lecture note series, Nr. 81. Cambridge University Press, Cambridge 1983.

[Ga-Hoe] J. Gamst, K. Hoechsmann: *Quaternions généralisés.* Compt. Rendu. Acad. Sci. Paris 269 (1969), 560–562.

[Gar-Or] G. Garfinkel, M. Orzech: *Galois extensions as modules over the group ring.* Canad. J. Math. 22 (1968), 242–248.

[Gr] C. Greither: *Cyclic Galois extensions and normal bases.* Habilitationsschrift. Universität München. 1988.

[Gr-Pa] C. Greither, B. Pareigis: *Hopf Galois theory for separable field extensions.* J. Algebra 106 (1987), 239–258.

[Har1] D. K. Harrison: *Abelian extensions of arbitrary Fields.* Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 230–235.

[Har2] D. K. Harrison: *Abelian extensions of commutative rings.* Mem. Amer. Math. Soc. 52 (1965), 1–14.

[Has] H. Hasse: *Die Multiplikationsgruppe der abelschen Körper mit fester Galois-Gruppe.* Hamb. Abh. 16 (1949), 29–40.

[Hoe] K. Hoechsmann: *Über nicht-kommutative abelsche Algebren.* J. reine angew. Math. 218 (1965), 1–5.

[Kn-Oj] M.-A. Knus, M. Ojanguren: *Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya.* Lecture notes in Mathematics 389. Springer-Verlag, 1974.

[K-O-S] M.-A. Knus, M. Ojanguren, D. J. Saltman: *On Brauer groups in characteristic p.* In: Brauer groups, Evanston 1975. Lecture notes in Mathematics 549. Springer-Verlag, 1976, 25–49.

[Kr-Ta] H. F. Kreimer, M. Takeuchi: *Hopf algebras and Galois extensions of an algebra.* Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 675–692.

[McL] S. Mac Lane: *Kategorien.* Springer-Verlag, 1972.

[Ma] P. Mammone: *Sur la corestriction des p-symboles.* Comm. Algebra 14 (1986), 517–529.

[Me] A. S. Merkurjev: *On the structure of the Brauer group of fields.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 49 (1985); Englische Übersetzung in Math. USSR Izv. 27 (1986) no. 1, 141–157.

[Me-Su] A. S. Merkurjev, A. A. Suslin: *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 46 (1982), 1011–1046; Englische Übersetzung in Math. USSR Izv. 21 (1983).

[O'M] O. T. Meara: *Symplectic groups.* Mathematical surveys 16, Amer. Math. Soc., 1978.

[Pa] B. Pareigis: *Descent theory applied to Galois theory.* Vorlesungsausarbeitung. University of California, San Diego, 1986.

[Pa2] B. Pareigis: *Non-additive ring and module theory IV: The Brauer group of a symmetric monoidal category.* In: Brauer groups, Evanston 1975. Lecture notes in Mathematics 549. Springer-Verlag, 1976, 112–133.

[Ri] C. Riehm: *The corestriction of algebraic structures.* Inv. Math. 11 (1970), 73–98.

[Ro-Ta] S. Rosset, J. Tate: *A reciprocity law for K_2-traces.* Comment. Math. Helvetici 58 (1983), 38–47

[Sch] W. Scharlau: *Quadratic and hermitian forms.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd.270. Spinger Verlag, 1985.

[Sw] M. E. Sweedler: *Hopf algebras.* Benjamin, New York 1969.

[Tak] M. Takeuchi: *The #-product of group sheaf extensions applied to Long's theory of dimodule algebras.* Algebra Berichte 34 (1977).

[Ta-Oo] J. Tate, F. Oort: *Group schemes of prime order.* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 3 (1970), 1–31.

[Ti] J.-P. Tignol: *On the corestriction of central simple algebras.* Math. Z. 194 (1987), 267–274.

[Ul1] K. H. ULBRICH: *Über nicht-kommutative abelsche Galoisalgebren.* Comm. Algebra 9 (1981), 553–559.

[Ul2] K. H. ULBRICH: *Galoiserweiterungen von nicht-kommutativen Ringen.* Comm. Algebra 10 (1982), 655–672.

[Ul3] K. H. ULBRICH: *Sur le smash-produit des algèbres galoisiennes.* Compt. Rendu. Acad. Sci. Paris 303 (1986), 769–772.

[Wa] W. C. WATERHOUSE: *Introduction to affine group schemes.* Graduate Text in Mathematics 66. Springer-Verlag, 1979.

[Wi] D. J. WINTER: *The structure of fields.* Graduate Text in Mathematics 16. Springer-Verlag, 1974.

[Yo] K. YOKOGAWA: *Hopf-Galois extensions and smash products.* J. Algebra 107 (1987), 138–152.